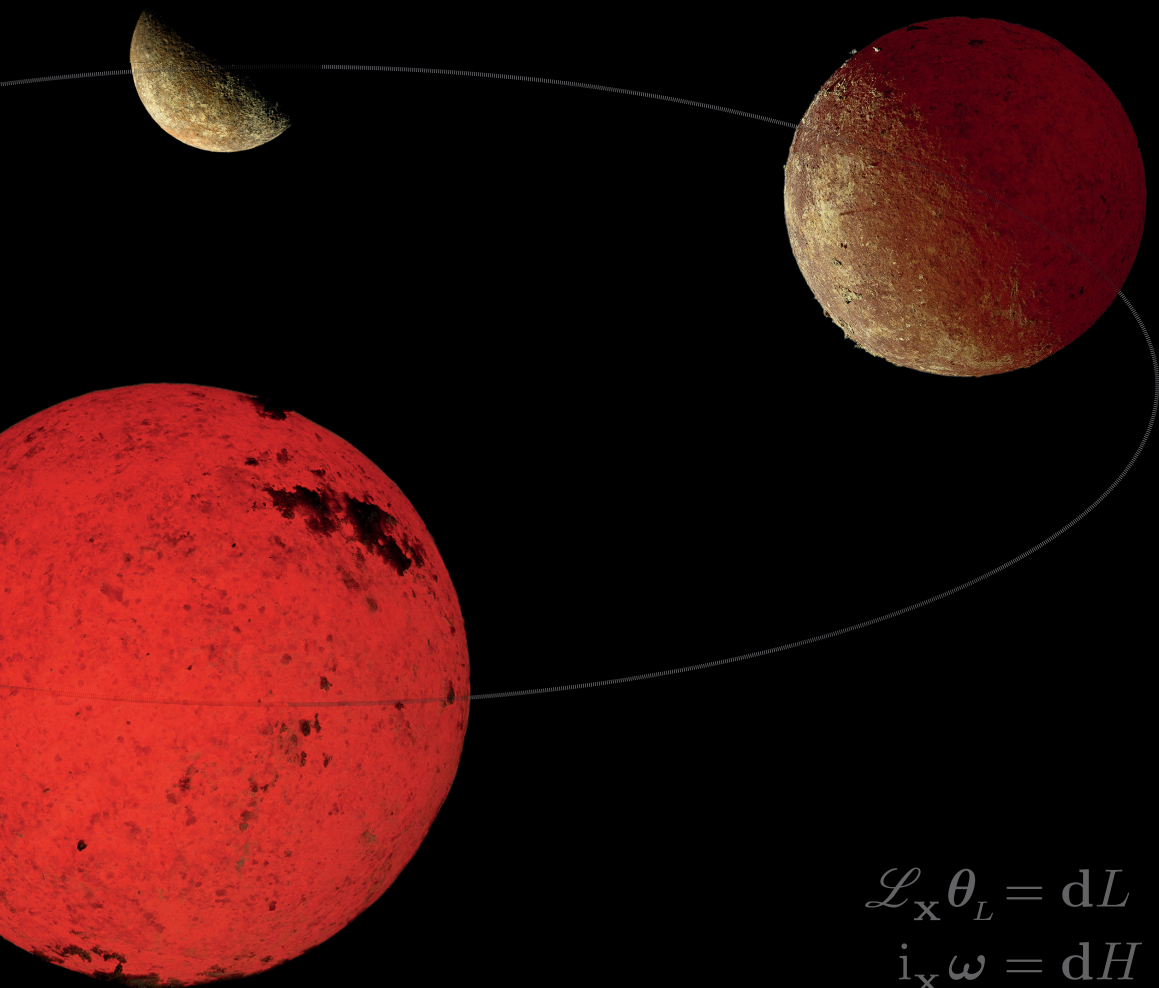


TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS



$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L &= dL \\ i_{\mathbf{x}}\omega &= dH\end{aligned}$$

Teoretická mechanika ve třech knihách

Jiří Podolský

Recenzovali:

doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

prof. RNDr. Jan Novotný, CSc.

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

Univerzita Karlova
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty MatfyzPress

Praha 2024
Obálka s použitím fotografie Jana Dotřela
DTP Nakladatelství Karolinum
Sazba Jiří Podolský
Vydání první

© Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum, 2024
© Univerzita Karlova, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
MatfyzPress, 2024
© Jiří Podolský, 2024
Cover photo © Jan Dotřel, 2024

ISBN 978-80-246-5746-2 (Karolinum)
ISBN 978-80-7378-499-7 (MatfyzPress)
ISBN 978-80-246-5747-9 (pdf)



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

MatfyzPress

www.matfyzpress.cz

*Rozum je nepochybně slabý, když se poměřuje
svým nikdy nekončícím úkolem ...
Přesto výtvořiny intelektu přežívají rušně se ženoucí generace
a století za stoletím šíří světlo a teplo.
Utěšeni touto myšlenkou vraťme se v těchto neklidných dnech
k památce Newtonově, který byl dán lidstvu před třemi sty lety.*

Albert Einstein, vánoce 1942,
esej „Isaac Newton“ v *The Manchester Guardian*,
česky v knize *Z mých pozdějších let*, 1995, str. 147

Obsah

Tři knihy	15
 I KNIHA PRVNÍ:	
Teoretická mechanika v klasické formulaci	19
Předmluva a poděkování	21
Část I. MECHANIKA HMOTNÝCH BODŮ	25
1 Newtonovská mechanika	27
1.1 Hlavní pojmy, předpoklady a omezení klasické mechaniky	27
1.2 Newtonovy pohybové zákony	28
1.3 Od Newtona k analytické mechanice	30
2 Newtonovy rovnice s vazbami	32
2.1 Vazby a jejich klasifikace	32
2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu	35
2.2.1 Více hmotných bodů a více vazeb	39
2.3 D'Alembertův princip mechaniky	41
2.4 Princip virtuální práce	44
3 Lagrangeův formalismus	46
3.1 Popis systému	46
3.1.1 Zavedení zobecněných souřadnic	47
3.1.2 Konfigurační prostor a zobecněné rychlosti	48
3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu	49
3.2.1 Nejjednodušší situace	49
3.2.2 Nejobecnější situace	51
3.2.3 Potenciál a Lagrangeova funkce	53
3.2.4 Zobecněný potenciál	54
3.2.5 Příklad: částice v centrálním poli	55
3.3 Řešení pohybových rovnic a integrály pohybu	58

3.4	Pohyb v poli centrální síly	62
3.4.1	Pohyb planet aneb Keplerova úloha	63
3.4.2	Historická vsuvka z rudolfínské Prahy	66
3.4.3	Metoda efektivního potenciálu	67
3.4.4	Rozptyl nabitých částic	68
3.5	Problém dvou těles	71
3.6	Problém tří těles	73
4	Hamiltonův variační princip	74
4.1	Základy variačního počtu	74
4.1.1	Historické úlohy	74
4.1.2	Matematický aparát	76
4.1.3	Řešení historických úloh	79
4.2	Formulace Hamiltonova variačního principu	81
4.2.1	Hamiltonův variační princip v teorii pole	84
4.3	Teorém Emmy Noetherové	87
4.4	Kalibrační transformace a kalibrační pole	92
5	Hamiltonův formalismus	96
5.1	Základní pojmy Hamiltonova formalismu	96
5.1.1	Kanonická hybnost	96
5.1.2	Fázový prostor	97
5.1.3	Hamiltonova funkce	99
5.2	Hamiltonovy kanonické rovnice	101
5.3	Shrnutí a hlubší geometrický náhled	103
5.4	Klasické příklady	104
5.5	Poissonovy závorky	106
5.5.1	Definice a algebraické vlastnosti	106
5.5.2	Fundamentální Poissonovy závorky	108
5.5.3	Poissonovy závorky a integrály pohybu	109
5.6	Užití Hamiltonova formalismu ve fyzice	111
5.7	Kanonické transformace	115
5.7.1	Podmínky kanoničnosti transformace	116
5.7.2	Jak prakticky zjistit, zda transformace je kanonická	120
5.7.3	Důležité vlastnosti kanonických transformací	121
5.8	Hamiltonova–Jacobiho teorie	125
5.8.1	Shrnutí postupu, metody řešení a příklad	126
5.8.2	Další teoretické aspekty Hamiltonovy–Jacobiho teorie	129
	Část II. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA	135
6	Kinematika tuhého tělesa	137
6.1	Vektory a tenzory	137
6.2	Relativita otáčivého pohybu	140
6.3	Zavedení úhlové rychlosti	141

6.3.1	Skládání úhlových rychlostí	143
6.4	Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice	144
6.5	Zrychlení v neinerciální soustavě	145
7	Dynamika tuhého tělesa	147
7.1	Tenzor setrvačnosti	147
7.2	Eulerovy dynamické rovnice	151
7.3	Odvození pomocí Lagrangeova formalismu	152
8	Aplikace: setrvačníky	155
8.1	Volný setrvačník (bezsilový)	155
8.2	Setrvačník se třením	157
8.3	Těžký symetrický setrvačník s pevným bodem	159
	Část III. MECHANIKA KONTINUA	163
9	Rovnice struny a její řešení	165
9.1	Odvození rovnice pro příčné kmity struny	165
9.2	Lagrangeova funkce struny	166
9.3	Podélné kmity struny	168
9.4	Řešení rovnice struny	169
9.4.1	Metoda d'Alembertova	169
9.4.2	Metoda Bernoulliho–Fourierova	170
9.4.3	Příklad na Fourierovy řady	172
9.5	Další okrajové podmínky: volný konec, tření	173
9.5.1	Struna s volnými konci	174
9.5.2	Odrazy na koncích struny v d'Alembertově metodě	175
10	Mechanika kontinua	177
10.1	Lagrangeův a Eulerův popis	177
10.1.1	Deformační tenzory	180
10.1.2	Tekoucí materiálový objem	182
10.2	Síly objemové a plošné popsané Cauchyho tenzorem napětí	184
10.2.1	Podmínky rovnováhy kontinua	186
10.2.2	Formální ekvivalence objemových a plošných sil	187
10.3	Základní rovnice pro pohyb kontinua	188
10.3.1	Rovnice kontinuity	188
10.3.2	Pohybová rovnice	189
10.3.3	Symetrie tenzoru napětí	189
10.3.4	Rovnice pro vnitřní energii	190
10.3.5	Rovnice pro entropii	190
10.4	Popis materiálů v teorii kontinua	190
10.4.1	Tekutiny	191
10.4.2	Pevné látky	192
10.5	Dokonalá tekutina	193
10.5.1	Vlny v dokonalé tekutině	194

10.5.2	Nevířivé proudění a Bernoulliho rovnice	194
10.6	Proudění vazké tekutiny, Navierova–Stokesova rovnice	196
10.6.1	Geometricky podobná proudění a turbulence	196

II KNIHA DRUHÁ:

Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie	201
--	------------

Předmluva a poděkování	203
-------------------------------	------------

1 Základy diferenciální geometrie	205
--	------------

1.1	Variety a základní objekty na nich	205
1.1.1	Pojem variety $\mathcal{M}$	205
1.1.2	Funkce na varietě	209
1.1.3	Křivky na varietě	210
1.1.4	Vektory na varietě	211
1.1.5	Formy na varietě	213
1.2	Tečný bandl $T\mathcal{M}$ a kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$	217
1.2.1	Fibrování prostor	218
1.3	Vektorové pole $\mathbf{X}$ a jeho integrální křivky $\gamma(t)$	220
1.4	Tok Φ_t generovaný vektorovým polem	222
1.4.1	Zobrazení <i>push-forward</i> a <i>pull-back</i>	222
1.4.2	Zobrazení <i>pull-back</i> pro obecné tenzorové pole	224
1.4.3	Lieův přenos funkce, vektoru a formy	226
1.5	Lieova derivace $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$	227
1.6	Lieova závorka $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$	230
1.7	Diferenciální 2-formy a jejich vztah k 1-formám	233
1.8	Diferenciální p -formy	239

2 Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky	242
--	------------

2.1	Fázový portrét a dynamické vektorové pole	242
2.2	Fundamentální geometrické objekty Lagrangeova formalismu	246
2.3	Dynamická vektorová pole na TQ	247
2.4	Geometrická podoba Lagrangeových rovnic	248
2.5	Teorém Emmy Noetherové	251

3 Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky	255
--	------------

3.1	Legendreova duální transformace	255
3.2	Jednotné souřadnice na T^*Q a symplektická matice	259
3.3	Geometrická podoba Hamiltonových rovnic	261
3.4	Fázový prostor coby symplektická varieta	263
3.5	Poissonovy závorky geometricky	265
3.6	Hamiltonova verze teorému Emmy Noetherové	266
3.7	Kanonické transformace geometricky	267
3.8	Invariance symplektické formy	269

3.9	Liouvilleova věta	269
3.10	Poincarého invarianty	273
A	Lagrangeovská vektorová pole	275
A.1	Dynamická vektorová pole na TQ	275
A.2	Geometrická formulace polí druhého řádu	277
B	Další vlastnosti tečného bandlu TQ	278
B.1	Symplektická struktura na TQ	278
B.2	Hamiltonovská dynamika na TQ	280
C	Časově závislé hamiltoniány	284
C.1	Geometrické objekty na rozšířeném fázovém prostoru	285
C.2	Pohybové rovnice a vztah k časově nezávislé mechanice	286
C.3	Časově závislé kanonické transformace	291
C.4	Hamiltonova–Jacobiho teorie geometricky	294
	Shrnutí hlavních pojmů a notace	296
	Anglický slovníček	299

III KNIHA TŘETÍ:

	Teoretická mechanika v příkladech	303
	Předmluva a poděkování	305
1	Newtonovská mechanika	307
1.1	Částice odpuzovaná silou	309
1.2	Projektil vystřelený ze Země	311
1.3	Brzdící loď	314
1.4	Harmonický oscilátor	315
1.5	Matematické kyvadlo	316
1.6	Malé kmity v obecném potenciálu	318
1.7	Pád tunelem napříč Zemí	319
1.8	Rozmotávání lanka	320
1.9	Buquoyova úloha z roku 1814	322
1.10	Poyntingův–Robertsonův efekt	325
2	Newtonovy rovnice s vazbami	327
2.1	Bod v parabolickém korýtku	330
2.2	Napětí v závěsu matematického kyvadla	331
2.3	Bod na zrychlující nakloněné tyčce	332
2.4	Bod v průsečíku koule s rovinou	333
2.5	Pohyb po pohybujícím se klínu	334
2.6	Bod v průsečíku dvou rovin	336

2.7	Kutálení mince	337
2.8	d'Alembertův princip	338
2.9	Rovnováha tyče se závažím	339
2.10	Rovnováha tyče v parabolickém korýtku	340
3	Lagrangeův formalismus	343
3.1	Kmity pružiny	348
3.2	Kyvadlo s protizávažím	349
3.3	Cykloidální kyvadlo	350
3.4	Eliptické kyvadlo	352
3.5	Dvojkyvadlo	355
3.6	Ampérova úloha	357
3.7	Kyvadlo s proměnnou délkou	359
3.8	Pohyb závaží spojeného s bodem obíhajícím po desce	360
3.9	Binetův vzorec: dipólová porucha	362
3.10	Newtonovský potenciál s kvadrupólovou poruchou	364
3.11	Stáčení perihelia v obecném sférickém poli	365
3.12	Rychlosti planety obíhající po elipse	367
3.13	Zobecněný potenciál elektromagnetického pole	368
3.14	Zobecněná energie částice v elektromagnetickém poli	370
4	Hamiltonův formalismus	371
4.1	Hamiltonova funkce částice v elektromagnetickém poli	377
4.2	Částice v homogenním elektrickém poli	378
4.3	Částice v homogenním magnetickém poli	379
4.4	Harmonický oscilátor	380
4.5	Hamiltonova funkce ve sférických souřadnicích	381
4.6	Hamiltonova funkce s logaritmem	382
4.7	Poissonova závorka	383
4.8	Fundamentální Poissonovy závorky	383
4.9	Poissonovy závorky složek momentu hybnosti	385
4.10	Poissonova závorka velikosti momentu hybnosti	387
4.11	Integrály pohybu	387
4.12	Kanonické transformace	388
4.13	Řešení harmonického oscilátoru	389
4.14	Generující funkce kanonické transformace	390
4.15	Poissonovy závorky a kanonické transformace	392
4.16	Hamiltonova–Jacobiho teorie: harmonický oscilátor	393
4.17	Hamiltonova–Jacobiho teorie: šikmý vrh	395
4.18	Hamiltonova–Jacobiho teorie: pohyb v centrálním poli	396
5	Mechanika tuhého tělesa	399
5.1	Rozklad na translaci a rotaci	403
5.2	Tenzor setrvačnosti tyčky	404
5.3	Tenzor setrvačnosti kvádru	405

5.4	Tenzor setrvačnosti elipsoidu	407
5.5	Moment setrvačnosti kvádru vůči tělesové úhlopříčce	409
5.6	Kmity Machova skloněného kyvadla	410
5.7	Pohyb kuličky po nakloněné rovině	411
5.8	Langerova úloha: tyč padající na podlahu	412
Poděkování		417
Literatura		419
Rejstřík		423

Tři knihy

Konvolut tří knih, který držíte v ruce, představuje ucelený a navzájem propojený soubor učebnic newtonovské mechaniky. Vznikal postupně během minulého čtvrtstoletí jako učební text pro potřeby kurzů *Teoretická mechanika* a *Proseminář teoretické mechaniky*, které od roku 1995 respektive 2004 přednáším na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Výklad teoretické mechaniky při *klasické přednášce* určené pro 2. ročník studia v zimním semestru, které odpovídá obsah *KNIHY PRVNÍ*, se opírá o standardní parametrizaci pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí, případně kanonických hybností, a o složková vyjádření fyzikálních veličin. To má své dobré důvody historické, didaktické i početní. Od počátku 20. století však byly pojmy a zákony mechaniky postupně přeformulovány do abstraktního, elegantního jazyka diferenciální geometrie. Oproštění od souřadnic a složek veličin vedlo k hlubšímu pochopení podstaty mechaniky, zejména její symplektické struktury. Systematický výklad tohoto *geometrického pojetí* klasické mechaniky v české literatuře dosud chyběl, a právě to je obsahem *KNIHY DRUHÉ*. Lze ji dobře použít jako studijní podklad volitelného prosemináře. Trilogii uzavírají *hlavní typové příklady*, které by v průběhu semestru měly být spočítány na cvičeních. Pečlivě zvolené příklady v *KNIZE TŘETÍ*, které jsou všechny vzorově vyřešeny, ilustrují obecné teoretické metody a vztahy. Tím pomáhají pochopit aplikaci vzorců vyložených v knize první. Předkládaný konvolut tedy vzájemně provazuje klasickou přednášku a cvičení s moderním proseminářem.

V knihách jsou kromě toho zmíněny přirozené návaznosti na další obory teoretické fyziky, zejména kvantovou teorii, teorii relativity, teorii pole a statistickou fyziku. Mým cílem byla také přehledná struktura a srozumitelnost textů, bohatost ilustrací, adekvátnost rozsahu i formy výkladu a v neposlední řadě též přívětivá typografická podoba díla.

Jiří Podolský, Praha, 10. února 2023

KNIHA PRVNÍ

Teoretická mechanika v klasické formulaci

Předmluva a poděkování

Tento text by nemohl vzniknout bez Jiřího Langer (1939–2020), mého skvělého učitele a pak blízkého kolegy z Ústavu teoretické fyziky. Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., se výuce teoretické mechaniky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy věnoval šest desetiletí. Za tu dobu vychoval mnoho tisíc studentů.

Mezi nimi jsem se na podzim roku 1983 ocitl i já. Předmět *Teoretická mechanika* pro studenty 2. ročníku fyziky na Matfyzu mě doslova uhranul a 22. prosince jsem z něj úspěšně složil zkoušku (zápis v indexu mi doc. Langer provedl zeleným inkoustem, podobně jako v prvním ročníku prof. Kvasnica za *Proseminář matematické fyziky*). Nemohl jsem tehdy tušit, že se mi tento nádherný předmět stane celoživotním pedagogickým osudem. Jsem za to opravdu vděčný, a klíčovou roli v tom opět sehrál Jiří Langer. Když jsem v roce 1989 nastoupil na vědeckou aspiranturu na katedru matematické fyziky MFF UK (postupně se mohla zase vrátit k tradičnímu názvu Ústav teoretické fyziky), zvolil si mne jako jednoho z cvičících tohoto předmětu.

V roce 1990 jsem odjel studovat do USA a na University of New Mexico shodou okolností pomáhal jako Graduate Assistant výbornému pedagogovi prof. Charlesi Beckelovi s výukou kurzu *Analytical Mechanics*. Bylo velmi poučné a zajímavé na vlastní kůži zažít, jakým způsobem probíhá výuka teoretické mechaniky na amerických univerzitách a jaký je její obsah.

Po návratu do Prahy mne Jiří Langer podrobně vyzpovídal. Přemýšleli jsme potom, jak nejlépe zkombinovat tradiční středoevropský styl výuky s americkým, ve kterém se namísto cvičení jenom zadávají domácí úkoly a namísto písemného a ústního zkoušení jen píší testy. Tak vznikl náš „hybridní“ bodový systém,¹ který se opírá o pozitivní motivaci studentů a vede k jejich průběžné práci. Dost se nám osvědčil.

Krátce poté v roce 1995 mne Jiří Langer přizval, abych s ním kurz *Teoretická mechanika* přednášel. Za tuto jeho velkorysou nabídku, která pro mne byla jako z říše snů, jsem mu dodnes velmi zavázán. Tak jsem se jako začínající odborný asistent dostal k přednášení mechaniky na MFF UK. Nejprve jsem ze semestrálního kurzu převzal osm přednášek věnovaných hmotným bodům (až po Hamiltonovu–Jacobiho teorii), o čtyři roky později jsem přibral i dvě přednášky o mechanice tuhého tělesa. Od roku 2000 tak na kolegu Langer zbylo každoroční přednášení mechaniky kontinua. Inu, podal mi prst a přišel o skoro celou ruku. . .

¹Během semestru lze získat až 100 bodů (10 bodů za každý ze 4 domácích úkolů a 60 bodů za napsání testu obsahujícího 3 úlohy). Kdo získá alespoň 60 bodů, dostane zápočet. Kdo získá alespoň 80 bodů, nemusí psát písemnou část zkoušky. Odměnou za 95 a více bodů je čokoládový bonbón.

Tolik můj osobní příběh. Pro zachování historické paměti snad bude zajímavé uvést i vážené předchůdce, přednášející tohoto předmětu na Matematicko-fyzikální fakultě od jejího osamostatnění v roce 1952. Podle osobních vzpomínek Jiřího Langer a některých mých (možná neúplných) podkladů bylo personální obsazení výuky následující:

Miroslav Brdička	zhruba do roku 1960
Arnošt Hladík	60. léta
Jiří Langer	cvičení a od roku 1964 části přednášek
Jiří Blank, Luboš Valenta	několikrát v 70. letech
Jiří Langer	zhruba od roku 1980
Jiří Podolský	od roku 1995

Uvedená jména dokládají, že je už dlouhou tradicí, aby výuku teoretické mechaniky zajišťovali členové Ústavu (katedry) teoretické (matematické) fyziky.

Je to zavazující tradice. Umocněná tím, že vydáme-li se hlouběji do minulosti výuky mechaniky na Univerzitě v Praze, setkáme se s profesory Trkalem, Záviškou, Kolářkem, Kučerou a Strouhalem. A ještě před nimi také s Ernstem Machem, který zde během téměř třicetiletého působení jako profesor experimentální fyziky napsal a v roce 1883 vydal vlivnou učebnici mechaniky *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*. Toto pedagogicky skvěle podané dílo prezentuje téma z historického pohledu a obsahuje kritiku newtonovského konceptu absolutního prostoru a pohybu. Tento tzv. Machův princip se stal později velkou inspirací pro Alberta Einsteina. Je pozoruhodným faktem, že také Einstein sám působil o tři desetiletí později na téže (německé) Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze. Jako profesor teoretické fyziky zde tři semestry v letech 1911–1912 vyučoval *Mechaniku hmotných bodů* a *Mechaniku kontinua*.

Klasická Newtonova mechanika, která v historickém i obsahovém slova smyslu stojí v základech celé fyziky, je tu s námi již více než tři staletí. Před dvěma stoletími byla zásluhou Lagrangeho, Hamiltona a dalších oděna do velmi elegantního matematického hávu analytické mechaniky. Takto formulovaná teoretická mechanika tvoří východisko výuky fyziky na každé univerzitě. Bez jejího pochopení nelze postoupit dále k teorii relativistické ani kvantové. Knih, učebnic a skript teoretické mechaniky je proto v knihovnách světa doslova nepřehledné množství, ve všech hlavních jazycích i v bezpočtu jazyků lokálních.

Uvedme seznam významných českých učebnic teoretické mechaniky vzniklých a užívaných na Karlově univerzitě v Praze. První vydal už v roce 1880 profesor matematické fyziky a teoretické astronomie Augustin Seydler, ve 20. století pak následovalo několik dalších:

Augustin Seydler	<i>Theoretická mechanika pro vysoké školy</i>	1880
Bohumil Kučera	<i>Základy mechaniky tuhých těles</i>	1921
Viktor Trkal	<i>Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa</i>	1956
Miroslav Brdička	<i>Mechanika kontinua</i>	1959
Miroslav Brdička,		
Arnošt Hladík	<i>Teoretická mechanika</i>	1987

Z této perspektivy se zdá, že s odstupem 35 let od poslední „kanonické knihy“ Brdičky a Hladíka [1] možná nyní opět nadešel příhodný čas poskytnout studentům další učebnici, která by se pokusila reflektovat nedávné změny matematického formalismu (použití abstraktního a účinného jazyka diferenciální geometrie), reagovala na vývoj oboru (posun ke studiu složitých dynamických systémů), modernizovala styl výkladu (efektivní stručnost při zachování adekvátní rigoróznosti), zvolila vhodnou formu prezentace (použití více obrázků a názorných schémat) i sazby (formát a velikost písma, přívětivá grafická podoba stránek).

Nicméně již koncem 90. let jsme s Jiřím Langerem pojali záměr vypracovat vlastní studijní texty ušité přímo na míru našeho kurzu *Teoretické mechaniky*. S použitím svých v $\text{\TeX}$ u vysázených podrobných příprav na přednášky jsem v roce 1999 sepsal studijní materiál z tuhého tělesa a kolega Langer koncipoval elegantní úvod do jím přednášené mechaniky kontinua a rovnice struny (přepočítáním a rozšířením tohoto stručného Langerova textu nyní vznikla III. část předkládané učebnice). V roce 2000 jsme oba materiály dali volně k dispozici studentům. Během dvaceti let jsem pak postupně dopisoval další chybějící kapitoly (a průběžně opravoval a měnil ty již existující). Nejprve to byl Lagrangeův formalismus (2006), pak Hamiltonův (2016) a nakonec i dlouho odkládaná kapitola věnovaná Hamiltonovu variačnímu principu (2019). Nyní již tedy bylo možné učebnici dokončit a v ucelené formě předložit studentům. Snad bude k užítku.

Jiří Podolský, Praha, 21. srpna 2022

Část I.

MECHANIKA
HMOTNÝCH BODŮ

Kapitola 1

Newtonovská mechanika

V této stručné úvodní kapitole připomeneme klíčové pojmy a vzorce klasické mechaniky. Naznačíme i její meze ve vztahu k moderní relativistické a kvantové fyzice.

1.1 Hlavní pojmy, předpoklady a omezení klasické mechaniky

Úkolem klasické newtonovské mechaniky je popsat pohyb objektů, které navzájem interagují skrze silová působení. Klasická mechanika při tom pracuje s následujícími základními pojmy, o nichž činí tyto apriorní předpoklady:

- **prostor:** *spojitý, 3-dimenzionální, eukleidovský, homogenní a izotropní*
- **čas:** *spojitý, 1-dimenzionální, absolutní, rovnoměrně plynoucí, jednosměrný*
- **objekty:** *jsou idealizovány soustavou rozlišitelných hmotných bodů (nebo spojitým kontinuem)*
- **stav:** *stav hmotného bodu určen jeho polohou a hybností*

Z pohledu fyziky 20. a 21. století víme, že většina těchto předpokladů ve skutečnosti neplatí, nicméně za běžných okolností jsou s velmi dobrou mírou přesnosti oprávněné. Například:

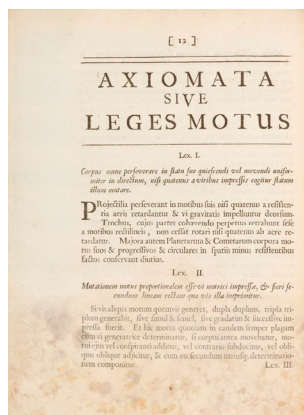
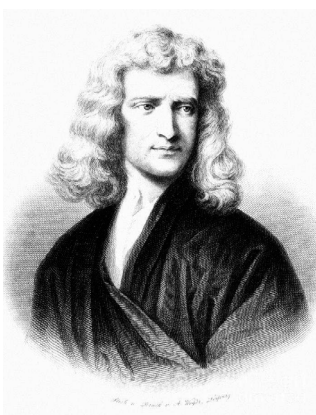
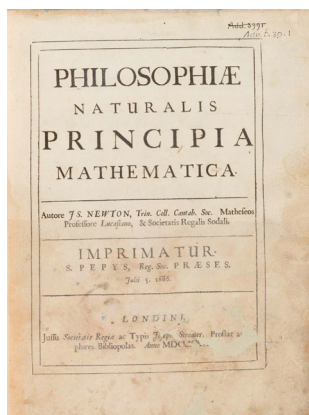
- podle obecné teorie relativity není prostoročas v přítomnosti gravitace plochý (ale ve sluneční soustavě je jeho zakřivení malé a odchylky od newtonovských předpovědí tudíž obvykle zanedbatelné)
- podle teorie relativity má každý pozorovatel svůj vlastní čas (ale pro malé rychlosti a daleko od hmotných těles časy různých pozorovatelů splývají)

- v kvantové teorii jsou elektrony, fotony a další objekty mikrosvěta principiálně nerozlišitelné
(avšak pro makroskopická tělesa platí standardní statistika a kauzalita)
- v kvantové mechanice je stav dán například jenom polohou částice, a v tom případě je její hybnost libovolná (anebo naopak jenom hybností částice, a v tom případě je její poloha libovolná). Lze určovat pouze pravděpodobnost, s jakou naměříme různé hodnoty fyzikálních veličin
(nicméně makroskopická tělesa se za běžných teplot chovají klasicky a deterministicky, jejich pohyb je popsateľný spojitou trajektorií)

Můžeme tedy učinit praktický závěr, že předpoklady Newtonovy mechaniky sice v přírodě nejsou rigorózně splněny, ale platí s „velkou přesností“ ve většině „obvyklých“ situací – pokud mají studované objekty běžné rozměry, hmotnosti, teploty, malé rychlosti a podobně. Tehdy je možné (a pochopitelně i výhodné) aplikovat poměrně snadný aparát klasické newtonovské fyziky.

1.2 Newtonovy pohybové zákony

Isaac Newton (1643–1727) ve svém přelomovém díle *Philosophiæ naturalis principia mathematica* z roku 1687 (zkráceně *Principia*) položil základy matematicky pojaté přírodovědy. Zejména zformuloval následující zákony mechaniky:



- Lex. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
- Lex. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
- Lex. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

V českém překladu tedy:

- zákon 1. *Každé těleso setrvává ve stavu klidu anebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, ledaže je donuceno svůj stav změnit v důsledku sil na něj působících.*
- zákon 2. *Změna hybnosti je úměrná působící síle a odehrává se ve stejném směru, ve kterém tato síla působí.*
- zákon 3. *Proti každé akci vždy působí stejně velká reakce, neboli: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.*

V našem textu se však nebudeme doslova držet těchto Newtonových původních formulací, které v různých obměnách známe již ze střední školy, viz též [1, 3]. Zákony místo toho přeformulujeme do moderní podoby, která lépe vystihuje jejich fundamentální obsah a význam:

1.

Existuje vztahný systém (nazýváme ho inerciální), vůči němuž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Volný hmotný bod je takový, který je odstíněný od všech „pravých“ sil. Toto odstínění lze v principu provést pro každou interakci, vyjma gravitace (proto se musíme při konstrukci globálního inerciálního systému omezit na situace, kdy se studovaný objekt nachází daleko od velkých hmot). Připomeňme, že existuje celá třída inerciálních systémů navzájem spojených *konstantním otočením* nebo *konstantní translací* nebo **Galileiho transformací** $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$, kde $\mathbf{x}$ je vektor polohy a $\mathbf{V}$ je vektor rychlosti čárkovaného inerciálního systému vůči nečárkovanému. Právě v inerciálních vztahných systémech je formulace druhého Newtonova pohybového zákona pro hmotné body jednoduchá:

2.

Pro každý hmotný bod existuje konstanta m a vektorová funkce $\mathbf{F}$ taková, že jeho pohyb vůči inerciálnímu systému je určen diferenciální rovnicí $m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$.

Druhý zákon je vlastně implicitní definicí setrvačné hmotnosti m hmotného bodu a současně i působící síly $\mathbf{F}$. Podstatné je, že tento zákon je *univerzální* v tom smyslu, že platí pro každý hmotný bod hmotnosti m a libovolnou klasickou sílu $\mathbf{F}$ (a jejich kombinace).

Mechanika se sama o sobě „nestará“ o původ $\mathbf{F}$. To je úkolem ostatních oborů fyziky, například

teorie gravitace, podle níž $\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} (-\mathbf{n})$

Newtonův gravitační zákon (1687),

teorie elektromagnetizmu: $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Maxwell (1864), Lorentzova síla (1892)

a tak dále.

Na charakter síly $\mathbf{F}$ většinou klademe přirozené požadavky, například:

- *platí princip akce a reakce*
(problematické v případech nestacionárních polí)
- *závislost jen na okamžitém stavu*
(problémy s retardací při konečné rychlosti šíření pole)
- *platí princip superpozice*
(neplatí v silných gravitačních ani elmag polích)

V situacích, kdy jsou rozměry studovaného systému mnohem menší než je charakteristická vzdálenost daná součinem rychlosti šíření interakce a charakteristického času, lze tyto problémy ignorovat.

Závěrem zdůrazněme, že Newton svůj druhý pohybový zákon zformuloval velmi obecně,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

tedy že působící síla je rovna časové změně hybnosti tělesa, nikoli tedy jen součinu hmotnosti a zrychlení tělesa. Samozřejmě, v případě hmotného bodu či těles, které v průběhu děje nemění svou hmotnost m , platí $\dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}} = m \ddot{\mathbf{x}}$. Avšak při zkoumání *pohybu tělesa s proměnnou hmotností* (například startu rakety) je obecně zapotřebí řešit Newtonovu rovnici (1.1). Jako první v historii fyziky takové úlohy formuloval a řešil v letech 1812–1815 v Čechách hrabě Jiří Buquoy [7, 8]. Jeho pozoruhodná práce však upadla v zapomnění a úlohy s proměnnou hmotností byly po mnoha desetiletích znovu nezávisle řešeny až dalšími fyziky [9].

Ještě zajímavější však je, že po formální stránce platí pohybová rovnice ve tvaru (1.1) dokonce i v Einsteinově *speciální teorii relativity*. V takovém případě však mají symboly poněkud jinou fyzikální interpretaci: $\mathbf{p}$, $\mathbf{F}$ a $\mathbf{v}$ již nejsou vektory v tří-rozměrném eukleidovském prostoru ale čtyř-vektory v Minkowského prostoročase, časová derivace se vztahuje k vlastnímu času τ pohybujícího se objektu a m je jeho klidová hmotnost.

1.3 Od Newtona k analytické mechanice

V tomto studijním textu se budeme postupně seznamovat s několika různými formulacemi klasické mechaniky. Již od základní školy známe její běžnou „Newtonovu“ podobu, která jako hlavní veličiny využívá **vektory**, především vektor polohy $\mathbf{x}$, vektor rychlosti $\mathbf{v}$, vektor zrychlení $\mathbf{a}$, vektor síly $\mathbf{F}$ atd. Manipulace s vektorovými veličinami je však u složitějších úloh dosti obtížná (zejména vstoupí-li do hry též jejich vektorový součin).

Proto se v průběhu 18. a 19. století vynořila řada alternativních formulací klasické mechaniky, u jejichž zrodu stáli Leibniz, Bernoulli, Maupertuis, Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson, Jacobi, Hamilton a mnozí další. Společným rysem těchto formulací je, že fundamentálními veličinami jsou specifické **skaláry**.

Příkladem takových fundamentálních skalárů jsou zejména vhodné kombinace kinetické a potenciální energie studovaného systému, jež dávají Lagrangeovu funkci L či Hamiltonovu funkci H , anebo akční funkcionál S . Ukazuje se, že stačí správným způsobem operovat pouze s nimi. Například pohybové rovnice (a jejich integrály, tedy zachovávající se veličiny) získáme pouhým derivováním zmíněných skalárů podle vhodných proměnných, variováním funkcionálů a podobně.

Hlavními vzorci tohoto typu jsou **Lagrangeovy rovnice** (3.24),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0,$$

Hamiltonovy kanonické rovnice (5.8),

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j},$$

anebo **Hamiltonův variační princip** (4.8),

$$\delta S = 0.$$

Tyto modernější přístupy ke klasické mechanice se často označují jako *analytická mechanika*. Význam nových alternativních formulací mechaniky je četný, především:

- **otevívají cestu k popisu celé řady nemechanických jevů:**
lze je zobecnit v teorii pole, v relativistických teoriích, v kvantových teoriích
- **jsou mohutnějším nástrojem výpočtů:**
jsou užitečné prakticky pro řešení složitých úloh (exaktně, perturbačně nebo numericky)
- **využívají metod pokročilé matematiky:**
rozšiřují spektrum matematických znalostí (parciální diferenciální rovnice, variační počet)
- **jsou krásné a elegantní:**
patří do pokladnice lidského ducha a jejich poznáním se otevírá zcela nový pohled na svět

Vydejme se tedy nyní na společnou cestu k novým obzorům.

Kapitola 2

Newtonovy rovnice s vazbami

Náš první krok směrem k analytické mechanice bude sice malý, ale důležitý. Začneme rozбором problému, jak řešit pohybové rovnice s dodatečnými vazbami. Stále ještě zůstaneme v původní „vektorové“ formulaci Newtonovy mechaniky a v kartézských souřadnicích. Zavedeme ale užitečný formalismus, který nám umožní řešit situace, kdy pohyb objektů již není volný, ale kromě působících „externích“ sil je navíc určitým předepsaným způsobem omezen. Například tím, že se těleso smí pohybovat jen po určité zakřivené ploše, že se musí kutálet bez prokluzování a podobně.

2.1 Vazby a jejich klasifikace

Newtonův pohybový zákon (1.1) určuje, jak se soustava hmotných bodů pohybuje pod vlivem působících sil, například gravitační či Lorentzovy, viz část 1.2. Tyto síly, které jsou explicitně zadány jako hladké funkce *polohy*, *rychlosti* a případně *času*, se tradičně označují jako takzvané **vtištěné síly** a označují se symbolem $\mathbf{F}$. V tom případě jsou pohybové rovnice z matematického hlediska soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Soustava má obecně řešení, které je jednoznačně určeno počátečními podmínkami, tedy hodnotami poloh a rychlostí (resp. hybností) na počátku děje.

Pohybový zákon však můžeme užít i obráceně: je-li pohyb soustavy znám, tj. jsou-li souřadnice poloh dány jako konkrétní funkce času, můžeme dvojím zderivováním a dosazením do (1.1) určit síly, které na soustavu v průběhu děje působily. Takovou úlohu řešil už Newton v samých počátcích mechaniky, když z pohybu planet – z Keplerových zákonů – určil tvar gravitačního zákona.¹

Často se ale v mechanice setkáváme s úlohami, které jsou „tak něco mezi“ oběma těmito krajními situacemi. Pohyb objektů, na něž působí vtištěné síly $\mathbf{F}$, není zpočátku plně znám, ale je omezen tím, že jsou na něj položeny jisté *apriorní podmínky*

¹Je pozoruhodné, že toto odvození provedl pomocí čistě geometrických úvah. Podrobnosti viz například [10].

– například že některé z hmotných bodů soustavy „kloužou“ po zadaných plochách, body mohou být spojeny tuhými (nehmotnými) tyčemi a podobně. O těchto do-
datečných podmínkách obecně hovoříme jako o **vazbách**. Jejich účinek na hmotné
body můžeme nahradit pomocnými silami, které přirozeně nazýváme **vazbové síly**
a označujeme je **R**. Vazbové síly však nejsou zpočátku *explicitně* zadány a musejí
být odvozeny během hledání konzistentního řešení pohybových rovnic.

Vazby obecně mohou omezovat polohy i rychlosti bodů soustavy a mohou záviset
na čase. Nejjednodušší a z hlediska fyzikálních aplikací i nejdůležitější typ vazeb lze
zapsat jako implicitní rovnici nějaké *pevné hladké plochy v prostoru* s kartézskými
souřadnicemi $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$:

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (2.1)$$

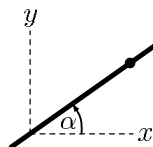
Z věty o implicitní funkci více proměnných plyne, že například lze (alespoň lokálně)
vyjádřit souřadnici x^3 jakožto funkci zbylých dvou souřadnic (x^1, x^2) . Předepsáním
vazby (2.1) tedy omezujeme pohyb hmotného bodu v třírozměrném prostoru jen
na hladký dvourozměrný *podprostor* přípustných poloh, takzvaný **konfigurační
prostor**. Jeho dimenze je určena **počtem stupňů volnosti** soustavy, což je po-
čet *nezávislých* souřadnic. Každá vazba (2.1) snižuje počet stupňů volnosti o jeden:
původní tři stupně volnosti se vazbou efektivně zredukovaly na pouhé dva. Před-
epsáním další vazby by soustava měla už jen jeden stupeň volnosti (typicky by
pak byl pohyb hmotného bodu omezen na křivku určenou průsečíkem příslušných
hladkých ploch).

Příklady jednoduchých vazeb:

- *nakloněná přímka:*

$$\phi \equiv y - x \tan \alpha = 0. \quad (2.2)$$

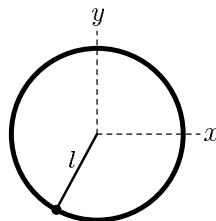
Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po
přímce se sklonem α , neboť $\tan \alpha = y/x$ (předpokládáme
 $z = 0$; pro z libovolné jde o nakloněnou rovinu).



- *matematické kyvadlo:*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (2.3)$$

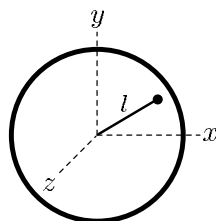
Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po kruž-
nici, jejíž střed je v počátku a poloměr má l (předpoklá-
dáme $z = 0$).



- *sférické kyvadlo (pohyb po povrchu koule):*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (2.4)$$

Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po
sféře, jejíž střed je v počátku a poloměr má l .



- *pohyb po povrchu koule s proměnným poloměrem:*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0. \quad (2.5)$$

Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po sféře, její poloměr se mění jako *zadaná* funkce času $l(t)$.

Obecně mohou vazby záviset také na rychlosti hmotných bodů, případně mohou omezovat jejich pohyb nejen na zakřivené plochy, ale na celý poloprostor, jehož je zakřivená plocha hranicí. Pro přehlednost proto nyní provedeme klasifikaci vazeb a zavedeme terminologii běžnou v literatuře.

Klasifikace vazeb podle tří různých kritérií:

$$\text{vazba} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{\textit{oboustranná}}: & \phi = 0 \\ \text{\textit{jednostranná}}: & \phi \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{omezení na podprostor,} \\ \text{omezení na „polo“prostor.} \end{array} \quad (2.6)$$

$$\text{vazba} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{\textit{skleronomní}}: & \phi(x^j) \\ \text{\textit{rheonomní}}: & \phi(x^j, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{nezávislá na čase,} \\ \text{závislá na čase.} \end{array} \quad (2.7)$$

$$\text{vazba} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{\textit{holonomní}}: & \phi(x^j, t) \\ \text{\textit{neholonomní}}: & \phi(x^j, \dot{x}^j, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{nezávislá na rychlosti,} \\ \text{závislá na rychlosti.} \end{array} \quad (2.8)$$

Vazba (2.1) je tedy oboustranná, skleronomní a holonomní. Také všechny čtyři vazby (2.2)–(2.5) jsou oboustranné a holonomní, přičemž první tři jsou skleronomní, zatímco poslední je rheonomní.

Použité termíny jsou z řečtiny: *ho nomos* ($\delta \nu \acute{o} \mu \omicron \varsigma$) = zákon, *skléros* ($\sigma \kappa \lambda \eta \rho \acute{o} \varsigma$) = pevný, tvrdý, *rheó* ($\rho \acute{\epsilon} \omega$) = teču, plynu, *holos* ($\acute{o} \lambda \omicron \varsigma$) = celý.²

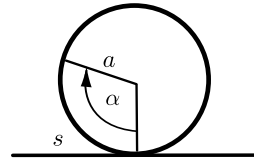
K neholonomním vazbám je však nezbytné učinit ještě velmi důležitou poznámku: *ne každá vazba obsahující rychlost je neholonomní*. Neholonomní je *pouze taková*, ve které se závislosti na rychlosti **nelze zbavit integrací**.

Příklad zdánlivě neholonomní vazby:

*disk pohybující se bez prokluzování
po vodorovné přímce*

Úloha má jen jeden stupeň volnosti.

Vazba na neprokluzování zní $\dot{s} = a \dot{\alpha}$, což ale lze integrovat do podoby *holonomní vazby*
 $\phi \equiv s - a \alpha = 0$.



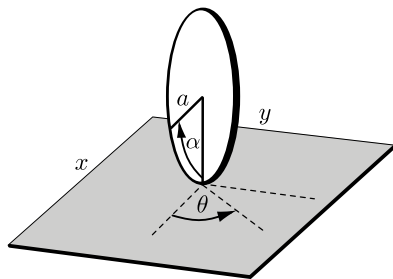
²Nemáme-li *sklerózu* a nejsme tedy *natvrdlí*, vzpomeneme si, že *rheologie* studuje *deformační* vlastnosti látek (anebo na Herakleitovo *panta rhei*, vše plyne).

Příklad skutečně neholonomní vazby:

*disk pohybující se bez prokluzování
po vodorovné rovině*

Úloha má čtyři stupně volnosti (je-li disk stále svislý), a to (x, y) bod dotyku, α úhel odvalení, θ úhel natočení disku.

Vazby na neprokluzování jsou $\dot{x} = a \dot{\alpha} \cos \theta$ a $\dot{y} = a \dot{\alpha} \sin \theta$, což jsou dvě vazby tvaru $\phi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \theta) = 0$, které však *nelze integrovat* do holonomních vazeb $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.



Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý: *vždy* je možné dostat se z počátečního stavu $x = 0 = y$, $\alpha = 0$ valením bez prokluzování do místa (x, y) s předepsaným úhlem odvalení α a s libovolným úhlem natočení disku θ . Stačí totiž zvolit vhodnou trajektorii, která končí v bodě (x, y) , má délku $s = a \alpha$ a tečna k trajektorii v koncovém bodě má směr θ . Je-li zadáno příliš malé (nebo dokonce záporné) koncové α , stačí na vhodném místě provést „otočku disku do protisměru“ ($\theta \mapsto \theta + \pi$), díky čemuž se pak začne úhel odvalení zmenšovat na požadovanou hodnotu. Všechny čtyři parametry jsou tedy zcela *nezávislé*, takže pro ně *nemůže* existovat vazba tvaru $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.

2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu

Vraťme se nyní k řešení úlohy, jak najít pohyb objektu podrobeného vazbě. V případě, že hmotnost objektu m je konstantní (například jde o hmotný bod), lze Newtonovu pohybovou rovnici (1.1) psát v obvyklém tvaru $m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, tedy v kartézských souřadnicích

$$m \ddot{x}_i = F_i(x^j, \dot{x}^j, t), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

přičemž $\ddot{x}_i = \ddot{x}^i$ jsou kartézské složky zrychlení.³ To je obecně soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro hledanou trajektorii $x^i(t)$. Pokud jsou funkce $F_i(x^j, \dot{x}^j, t)$ vyjadřující kartézské složky působící **vtištěné síly** $\mathbf{F}$ hladké funkce polohy a případně rychlosti a času, rovnice mají *jednoznačné řešení* určené počátečními podmínkami, tedy polohou x_0^i a rychlostí $\dot{x}_0^i$.

Nyní na soustavu pohybových rovnic naložíme holonomní (oboustrannou) vazbu

$$\phi(x^j, t) = 0, \quad (2.10)$$

což je v každém okamžiku t implicitní rovnice (hladké) pevné plochy v třírozměrném eukleidovském prostoru. Řešení rovnic (2.9) už nebude podmínkám (2.10) vyhovo-

³Obecně je mezi *vektory* (veličinami s kontravariantními složkami, tedy s horními indexy) a *1-formami* (veličinami s kovariantními složkami, tedy s dolními indexy) geometrický rozdíl. Protože však zde pracujeme v eukleidovském prostoru v bázi *kartézských* souřadnic, jsou *hodnoty* odpovídajících si kovariantních a kontravariantních složek totožné, tedy $x_i = x^i$ a $F_i = F^i$.

vat.⁴ Zkoumejme tedy, jak musíme pohybové rovnice (2.9) pozměnit, aby jejich řešení vazbu (2.10) v každém čase splňovalo.

Přidejme na pravou stranu pohybové rovnice (2.9) vhodné funkce $R_i(x^j, \dot{x}^j, t)$, které můžeme interpretovat jako kartézské složky dodatečné **vazbové síly** $\mathbf{R}$, zapříčinené interakcí s vazbou. V každém okamžiku a v každém místě vazby $\phi = 0$ můžeme tuto sílu jednoznačně rozložit na sílu $\mathbf{T}$ **tečnou** k vazbové ploše (2.10) a sílu $\mathbf{N}$ k této ploše **kolmou** (normálovou), tedy $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$. Normálovou komponentu $\mathbf{N}$ vazbové síly můžeme bez újmy na obecnosti psát ve složkách jako

$$N_i = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.11)$$

kde koeficient λ je zatím neurčená funkce souřadnic, rychlostí a času, zatímco grad ϕ se složkami $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ je (obecně nejednotkový) vektor kolmý k ploše určené (2.10).⁵ Rovnice (2.9) spolu s vazbou (2.10) tím přejde na tvar

$$\boxed{m \ddot{x}_i = F_i + T_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad \phi(x^j, t) = 0}, \quad (2.12)$$

kde T_i a λ jsou zatím neznámé funkce. Tuto soustavu rovnic, jež určuje pohyb hmotného bodu podrobeného holonomní vazbě, nazýváme **Lagrangeovy rovnice I. druhu** (J. L. Lagrange, 1775). Objasněme nyní fyzikální význam zavedených funkcí λ a T_i .

Z výrazu (2.11) je vidět, že Lagrangeův koeficient λ určuje *velikost normálové komponenty vazbové síly* $\mathbf{N} = \lambda \text{grad } \phi$, tedy $N \equiv |\mathbf{N}| = |\lambda| |\text{grad } \phi|$, kde $|\text{grad } \phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)^2}$.

Naproti tomu T_i jsou kartézské složky silové interakce $\mathbf{T}$ mezi vazbou a tělesem, které jsou k holonomní vazbě *tečné*. Reprezentují například *třecí sílu* mezi tělesem a povrchem popsaným vazbou $\phi(x^j, t) = 0$. Pokud je tento povrch dokonale hladký, tření vymizí a můžeme položit $T_i = 0$.

Ukažme nyní, že pro *holonomní a současně skleronomní* vazbu $\phi(x^j) = 0$ je možné vždy explicitně *vyjádřit* λ jako funkci okamžité polohy a okamžité rychlosti hmotného bodu, tedy $\lambda(x^j, \dot{x}^j, t)$. Hledané řešení je dáno jako $x^i = x^i(t)$. Dosadíme-li ho do vazbové podmínky, dostaneme složenou funkci $\phi(x^i(t))$ času t , jejíž hodnota *musí* být v každém čase také rovna nule. Dvojím derivováním $\phi(x^i(t))$ podle času získáme tedy rovnice

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^i = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \ddot{x}^i + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

⁴Uvažme např. pohyb hmotného bodu po povrchu koule bez působení vtištěné síly ($F_i = 0$). V takovém případě rovnice (2.9) určují, že pohyb je přímočarý, ale na sférické ploše popsané vazbou (2.10) žádné přímky neexistují.

⁵Uvažme dva blízké body o souřadnicích x^i resp. $x^i + dx^i$ na vazbové ploše. Zjevně platí $\phi(x^i) = 0$ a $\phi(x^i + dx^i) = 0$. Rozvineme-li druhou funkci do Taylorovy řady, dostaneme $\phi(x^i + dx^i) - \phi(x^i) = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = 0$. Protože vektor se složkami dx^i leží v *tečné* rovině k ploše $\phi = 0$, musí být vektor grad ϕ se složkami $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ k této ploše *kolmý*, protože jejich skalární součin je nulový.

Nyní vynásobíme druhou rovnici (2.13) konstantou m a dosadíme za $m\ddot{x}_i$ z Lagrangeovy rovnice (2.12). Protože tečné složky vazbové síly T_i a gradientu $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ jsou navzájem kolmé, dostaneme výraz

$$\sum_i \left(F_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right) = -m \sum_{i,k} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad (2.14)$$

takže

$$\lambda(x^j, \dot{x}^j, t) = - \left(m \sum_{i,k} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k + \sum_i F_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right) / \sum_i \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2. \quad (2.15)$$

Protože první a druhé derivace vazby ϕ jsou známé funkce, je funkce λ zcela určena normálovou složkou vtíštěné síly F_i , složkami rychlosti $\dot{x}^i$ hmotného bodu a jeho polohou v daném okamžiku. Dosadíme-li nyní λ z (2.15) do (2.12), dostaneme soustavu diferenciálních rovnic vyřešených k nejvyšším (to jest druhým) derivacím, v nichž na pravé straně stojí plně určené funkce souřadnic, rychlostí a času. Jejich řešitelnost pro „slušné“ funkce na pravé straně (přesněji: funkce splňující Lipschitzovu podmínku) zaručuje věta o existenci a jednoznačnosti. Najdeme-li jejich řešení a dosadíme teď už známé funkce $x^i = x^i(t)$ do (2.15), zcela určíme pomocí (2.11) normálovou sílu N_i způsobenou vazbou. Naopak funkce T_i vazbou určený nejsou.

Fyzikálně představují holonomní vazby (2.10) omezení pohybu na povrch nějaké tělesa. Obvykle navíc předpokládáme, že toto těleso je *dokonalé hladké*: tření zcela vymizí a v takovém případě klademe $T_i = 0$. Lagrangeovy rovnice (2.12) pak můžeme přepsat ve vektorovém tvaru

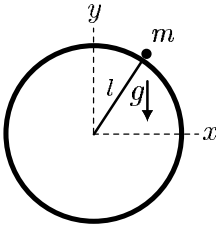
$$\boxed{m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} \phi, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0}. \quad (2.16)$$

Při pohybu po povrchu *reálného tělesa* ale vždy působí tření, které má směr tečný k povrchu. Pokud chceme toto tření uvažovat, je možné ho zahrnout mezi vtíštěné síly a určit je nějakým předpisem, který obecně závisí na tvaru vazbové plochy. Vezměme nejjednodušší příklad takzvaného *izotropního smykového tření*. Odpovídající síla $\mathbf{T}$ je úměrná kolmému tlaku na podložku a má směr opačný než rychlost, tedy má tvar $(-\text{koeficient vlečného tření } k) \times (\text{velikost normálové složky vazbové síly } N = |\lambda| |\operatorname{grad} \phi|) \times (\text{jednotkový vektor ve směru rychlosti})$. Bude proto vystižena předpisem

$$\mathbf{T} = -k N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \text{tedy} \quad T_i = T^i = -k |\lambda| \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k} \right)^2} \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\sum_j (\dot{x}^j)^2}}. \quad (2.17)$$

Není-li pohyb jednorozměrný, tak díky odmocninám zpravidla nelze tyto rovnice analyticky řešit. Úloha je však dobře definovaná a řešení můžeme najít numericky.

Příklad: Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po hladké kouli poloměru l . Byl vypuštěn z klidu z vrcholu.⁶ Ve které výšce bod opustí povrch koule?



Ze symetrie úlohy je zjevné, že pohyb se bude odehrávat ve svislé rovině. Můžeme proto položit $z = 0$ a řešit problém jen ve dvourozměrném řezu se souřadnicemi x, y . Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.16) tedy mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \phi &\equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde vazba $\phi = 0$ je stejná jako vazba (2.3) pro matematické kyvadlo. Jednostrannou vazbu ze zadání jsme zde pro zjednodušení výpočtů nahradili analogickou vazbou oboustrannou: uvažujeme pohyb v „kulové slupce“ poloměru l a hledaný bod najdeme podmínkou $R = 0$.

Spočítáním partiálních derivací funkce ϕ dostaneme z prvních dvou rovnic

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad (2.19)$$

$$m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y. \quad (2.20)$$

Nyní vezmeme vazbu (2.18) vyčíslenou podél trajektorie a provedeme její 1. a 2. úplnou časovou derivaci:

$$\dot{\phi} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0, \quad \ddot{\phi} = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] = 0.$$

Uvážíme, že $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu, a dosadíme za $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ z (2.19), (2.20). Po úpravě užitím $x^2 + y^2 = l^2$ dostaneme

$$\lambda = \frac{m}{2l^2}(gy - v^2), \quad (2.21)$$

což je realizace obecného výrazu (2.15) (přesvědčte se o tom!). Úlohu dopočítáme užitím zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgl,$$

z něhož vyjádříme rychlost $v^2 = 2g(l - y)$ a dosadíme do (2.21), takže

$$\lambda = \frac{mg}{2l^2}(3y - 2l).$$

⁶Vrchol je (nestabilní) rovnovážná poloha, takže bod je nutno vypustit z blízkého okolí vrcholu.

Hmotný bod opustí povrch koule v okamžiku, kdy vazbová síla vymizí, tedy $R = N = |\lambda| |\text{grad } \phi| = 2l |\lambda| = 0$ neboli $\lambda = 0$, což dává hledanou podmínku

$$y_o = \frac{2}{3} l. \quad (2.22)$$

Během řešení úlohy jsme použili **zákon zachování energie**. Jsou-li vazby *holonomní a současně skleronomní*, jako v tomto případě, je tento zákon *důsledkem pohybových rovnic* (nikoli dodatečným principem). Opravdu, sečteme-li první rovnici v (2.18) přenásobenou $\dot{x}$ s druhou rovnicí v (2.18) přenásobenou $\dot{y}$, dostaneme $m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) = -mg\dot{y} + \lambda(\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\dot{y})$, což můžeme přepsat do tvaru $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -(mgy) + \lambda\phi$. Protože $\dot{\phi} = 0$, lze tuto rovnici snadno integrovat: dostaneme

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{konst.}, \quad (2.23)$$

tedy zákon zachování mechanické energie.

2.2.1 Více hmotných bodů a více vazeb

Zobecníme nyní formalismus Lagrangeových rovnic I. druhu na soustavu N **hmotných bodů** a obecný počet v **vazeb**. Poloha hmotných bodů v třírozměrném eukleidovském prostoru je přirozeně určena jejich **kartézskými souřadnicemi** x^i , tedy N trojicemi čísel. V analytické mechanice je výhodné formálně reprezentovat polohy *všech* těchto N bodů **jediným bodem v $3N$ -rozměrném** eukleidovském prostoru, jehož souřadnice jsou dány průběžně očíslovanými kartézskými souřadnicemi jednotlivých hmotných bodů. Jinými slovy, souřadnice (x^1, x^2, x^3) tohoto fiktivního bodu tvoří souřadnice prvního hmotného bodu, (x^4, x^5, x^6) jsou souřadnice druhého hmotného bodu atd., až $(x^{3N-2}, x^{3N-1}, x^{3N})$ jsou souřadnice bodu N -tého. Časový vývoj soustavy N hmotných bodů je pak dán *trajektorií* $x^i(t)$ jediného fiktivního bodu v tomto formálním $3N$ -rozměrném kartézském prostoru se souřadnicemi x^i , kde $i = 1, 2, \dots, 3N$.

Rozšíření našeho postupu, jenž vedl k předchozím vztahům (2.12), na obecný problém pohybu N hmotných bodů podrobených $v < 3N$ holonomním vazbám $\phi_\nu = 0$ bez tření ($T_i = 0$) je vcelku přímočaré: vývoj je nyní popsán soustavou $3N$ Lagrangeových diferenciálních rovnic

$$\boxed{m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i}}, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad (2.24)$$

a v vazbových podmínkách

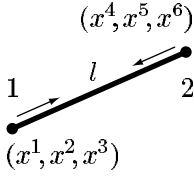
$$\boxed{\phi_\nu(x^1, x^2, \dots, x^{3N}, t) = 0}, \quad \nu = 1, 2, \dots, v. \quad (2.25)$$

Celkem tedy máme $3N + v$ rovnic pro $3N + v$ neznámých funkcí $x^i(t)$ a $\lambda_\nu(t)$. Zdůrazněme, že na levé straně rovnic (2.24) přes index i *nesčítáme*, tedy nepoužíváme Einsteinovu sumační konvenci.

Používáme zde také pravidlo, že hmotnost *prvního* bodu je $m_1 = m_2 = m_3$, hmotnost *druhého* bodu je $m_4 = m_5 = m_6$, a tak dále.

Příklad:

Příkladem vazby (2.25) může být skleronomní vazba



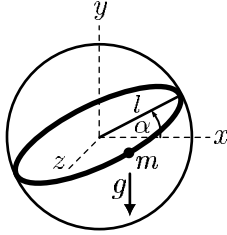
$$\phi \equiv (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^5)^2 + (x^3 - x^6)^2 - l^2 = 0,$$

která říká, že vzdálenost mezi prvním hmotným bodem o souřadnicích (x^1, x^2, x^3) a druhým hmotným bodem, který má souřadnice (x^4, x^5, x^6) , zůstává konstantní a rovna l . Všimněte si, že příslušný vektor vazbové síly $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ má 6 složek $\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$:

$$2\lambda[x^1 - x^4, x^2 - x^5, x^3 - x^6, -(x^1 - x^4), -(x^2 - x^5), -(x^3 - x^6)].$$

První tři složky určují vektor síly (akci), kterou působí druhý bod na první, zatímco zbylé tři složky naopak určují vektor síly (reakci), kterou působí první bod na druhý. Obě tyto síly evidentně působí podél spojnice obou bodů a jsou opačně orientované.

Příklad: Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po průsečiku hladké koule poloměru l s nakloněnou rovinou sklonu α . Nalezněte obě vazbové síly.



Máme jeden hmotný bod hmotnosti m , který je podrobený dvěma vazbám. První je identická s vazbou (2.4), zatímco druhá je identická s vazbou (2.2):

$$\phi_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad (2.26)$$

$$\phi_2 \equiv y - x \tan \alpha = 0. \quad (2.27)$$

Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.24) proto mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda_1 x - \lambda_2 \tan \alpha, \\ m\ddot{y} &= -mg + 2\lambda_1 y + \lambda_2, \\ m\ddot{z} &= 2\lambda_1 z. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nejprve tyto rovnice dosadíme do druhé časové derivace druhé vazby $\ddot{\phi}_2 = \ddot{y} - \ddot{x} \tan \alpha = 0$. Člen s λ_1 vypadne díky (2.27), takže

$$\lambda_2 = mg \cos^2 \alpha.$$

Nyní naopak dosadíme z (2.28) do druhé časové derivace první vazby $\ddot{\phi}_1 = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = 0$ a uijíme obě vazby (2.26), (2.27). Po úpravě dostaneme

$$\lambda_1 = \frac{m}{2l^2}(gy - v^2),$$

kde $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu. Všimněme si, že tento výraz je shodný s (2.21), jen rychlost nyní má i z-ovou složku.

Nakonec spočítáme *velikost* obou vazbových sil danou vztahy $R_1 \equiv |\mathbf{R}_1| = |\lambda_1| |\text{grad } \phi_1|$ a $R_2 \equiv |\mathbf{R}_2| = |\lambda_2| |\text{grad } \phi_2|$, což dává

$$R_1 = \frac{m}{l} |gy - v^2|, \quad (2.29)$$

$$R_2 = mg |\cos \alpha|. \quad (2.30)$$

První vazbová síla $\mathbf{R}_1$ působí radiálně (kolmo na sférickou plochu) a skládá se z průmětu tíhové síly a z dostředivé síly. Druhá vazbová síla $\mathbf{R}_2$ působí kolmo na nakloněnou rovinu a je dána přímočarým průmětem tíhové síly. Pro vodorovnou rovinu ($\alpha = 0$) dostáváme $R_2 = mg$, zatímco pro svislou rovinu ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) je $R_2 = 0$.

2.3 D'Alembertův princip mechaniky

Nyní uvedeme alternativní formulaci dynamického zákona klasické mechaniky, jež určuje pohyb soustavy hmotných bodů podrobených holonomním vazbám. Jedná se o tzv. **d'Alembertův princip** (Jean Le Rond d'Alembert, 1743) a v učebnicích se obvykle formuluje takto:

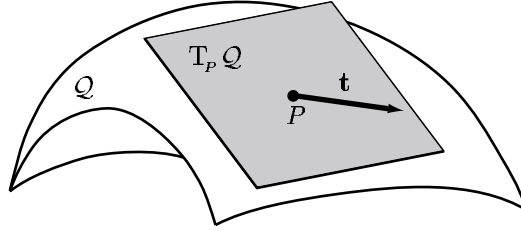
Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0 \quad (2.31)$$

pro libovolné virtuální posunutí δx^i , které je v souladu s vazbami.

Symbole zde mají stejný význam jako v předchozí části 2.2.1, tedy trojice x^i značí kartézské souřadnice hmotných bodů o hmotnostech m_i a F_i jsou příslušné složky výslednice vtištěných sil. Narozdíl od $3N$ Lagrangeových diferenciálních rovnic (2.24) má d'Alembertův princip mechaniky (2.31) formálně podobu *jediné rovnice*. Cenou za to však je, že musí být zaveden nový koncept takzvaných virtuálních posunutí δx^i .

V klasických učebnicích se uvádí, že *virtuální posunutí je nekonečně malé posunutí, které je v každém okamžiku v souladu se všemi holonomními vazbami* (2.25), tedy $\phi_\nu = 0$ pro $\nu = 1, 2, \dots, v$. Co přesně je ale míněno „nekonečně malým posunutím“? Odpověď dává až moderní *geometrická* definice: **virtuální posunutí δx^i jsou kartézské složky libovolného vektoru $\mathbf{t}$, jenž leží v tečné rovině k vazbám v daném bodě a v daném čase, jak ukazuje následující schematický obrázek:**



Zde $\mathcal{Q}$ (psací Q) je hladká plocha geometricky reprezentující holonomní vazbu $\phi = 0$ neboli konfigurační prostor v jistém čase (obecně je to průsečík všech vazeb $\phi_\nu = 0$). Systém se v tento okamžik nachází v poloze popsané bodem $P \in \mathcal{Q}$. Všechny možné *tečné vektory* $\mathbf{t}$ k zakřivené ploše $\mathcal{Q}$ v místě P vytvářejí tzv. *tečný prostor*, který se označuje symbolem $T_P \mathcal{Q}$. Užijeme-li pro určení bodu P kartézské souřadnice $x^1, x^2, \dots, x^{3N}$, pak libovolný tečný vektor $\mathbf{t} \in T_P \mathcal{Q}$ bude mít složky $\mathbf{t} \equiv (\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^{3N})$, což jsou výše zmíněné složky „virtuálního posunutí $\mathbf{t}$ “.⁷

Proto můžeme d’Alembertův princip mechaniky přeformulovat do moderní **ryze geometrické podoby** (kdy oproti (2.31) se již neodvoláváme na použité souřadnice a složky vektorů), totiž

$$(m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{pro všechny } \mathbf{t} \in T_P \mathcal{Q}, \quad (2.32)$$

kde symbol $\cdot$ značí skalární součin vektorů a m reprezentuje sadu trojic m_i . Nyní ukážeme důležitou větu:

D’Alembertův princip mechaniky je ekvivalentní Lagrangeovým rovnicím I. druhu, a tedy Newtonovým pohybovým rovnicím s holonomními vazbami.

Důkaz provedeme nejprve z Lagrangeových rovnic I. druhu (2.24). Převědeme složky vtištěných sil F_i doleva a každou rovnici přenásobíme příslušnou složkou virtuálního posunutí, tedy

$$(m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Všechny tyto rovnice (jichž je $3N$) sečteme a prohodíme pořadí sum na pravé straně:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i.$$

Nyní už jen stačí uvědomit si, že $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i$ lze geometricky přepsat do podoby skalárního součinu vektorů $\text{grad } \phi_\nu \cdot \mathbf{t}$. Protože vektor $\text{grad } \phi_\nu$ je *kolmý* na vazbu (plochu $\mathcal{Q}$), zatímco každý vektor $\mathbf{t}$ je *tečný* ke všem vazbám, je jejich skalární

⁷Dimenze tečného prostoru $T_P \mathcal{Q}$ je stejná jako dimenze plochy $\mathcal{Q}$, tedy v každém bodě P existuje $(3N - v)$ lineárně nezávislých tečných vektorů $\mathbf{t}$ (protože každá vazba snižuje počet stupňů volnosti systému o jeden). Každý z těchto tečných vektorů má ovšem $3N$ kartézských složek, tedy složky δx^i virtuálního posunutí $\mathbf{t}$ nejsou na sobě nezávislé.

součin nutně nulový, $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0$. D'Alembertův princip tedy plyne z Lagrangeových rovnic I. druhu.

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme platnost d'Alembertova principu (2.31). Nejsou-li dány žádné vazby, všechna virtuální posunutí δx^i jsou na sobě *nezávislá* (neboli v rovnici (2.32) je $\mathbf{t}$ zcela libovolný vektor), a tudíž musí vymizet závorka $(m_i \ddot{x}_i - F_i)$ pro každé i . Dostáváme tedy Newtonovy pohybové rovnice $m_i \ddot{x}_i = F_i$. V přítomnosti holonomních vazeb $\phi_\nu = 0$ již složky virtuálních posunutí δx^i *nejsou nezávislé* (např. z vazby $\phi \equiv x^1 + x^2 = 0$ plyne omezující podmínka $\delta x^1 = -\delta x^2$). Geometricky lze elegantně argumentovat takto: Podmínka (2.32) říká, že vektor $(m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F})$ leží v prostoru *kolmém* k $T_P Q$. V tomto kolmém prostoru vektory $\text{grad } \phi_\nu$ tvoří bázi. Lze tedy najít koeficienty λ_ν rozkladu $(m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F})$ do báze $\text{grad } \phi_\nu$ neboli

$$m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \text{grad } \phi_\nu ,$$

což je soustava Lagrangeových rovnic I. druhu (2.24) a důkaz je dokončen.

☒

Poznámka: Z geometrického tvaru d'Alembertova principu (2.32) lze odvodit další dva příbuzné principy. Za vektory $\mathbf{t}$ totiž můžeme zvolit *libovolné tečné vektory*. V původním d'Alembertově principu jsou $\mathbf{t}$ **vektory malých (virtuálních) posunutí** $\delta \mathbf{r}$, jejichž kartézské složky jsou δx^i . Můžeme ale vzít jinou (ekvivalentní) sadu tečných vektorů, jmenovitě **vektory rychlosti** $\delta \mathbf{v}$ se složkami $\delta \dot{x}^i$, anebo **vektory tečného zrychlení** $\delta \mathbf{a}_t$ se složkami $\delta \ddot{x}^i$. Vyjádřeno v kartézských složkách tak dostáváme další dva principy známé z historie mechaniky:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \dot{x}^i = 0 \quad \text{Jourdainův princip,} \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \ddot{x}^i = 0 \quad \text{Gaussův princip.} \quad (2.34)$$

Výše uvedená formulace d'Alembertova principu platí pro tzv. **vrátná** virtuální posunutí. To jsou taková, kdy ke každému malému posunutí δx^i z bodu P je možné také *opačné* posunutí $-\delta x^i$ z téhož bodu P vazby. Tato vlastnost platí, pokud jsou vazby *oboustranné*. Naproti tomu pro vazby *jednostranné* neplatí. Nicméně i tehdy lze d'Alembertův princip použít, zobecníme-li ho pro **nevrátná** virtuální posunutí do podoby

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i \geq 0 , \quad (2.35)$$

kde jednostranné holonomní vazby mají tvar $\phi_\nu \geq 0$ (přičemž δx^i míří do polo-prostoru $\phi_\nu \geq 0$).⁸

⁸Princip lze dále zobecnit i na neholonomní vazby (zejména když jsou lineární v rychlostech). Příslušné výrazy lze najít v klasických učebnicích mechaniky, například [1].

2.4 Princip virtuální práce

Rozebereme nakonec ještě speciální případ d'Alembertova principu mechaniky, kdy se *neodehrává žádný pohyb*. V takovém případě je $\ddot{x}_i = 0$ a (2.31) přechází na velmi jednoduchý tvar

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0}. \quad (2.36)$$

Říkáme mu **princip virtuální práce**, protože výraz nalevo můžeme fyzikálně chápat jako skalární součin působících sil a vektoru virtuálního posunutí z daného bodu.⁹ Jedná se o základní princip **statiky**, tedy oboru mechaniky zabývajícího se studiem podmínek, kdy je systém v rovnovážném stavu. Má aplikace v inženýrství, zejména konstrukci mostů, budov a jiných staveb či strojů. Jako jeden z prvních ho formuloval J. Bernoulli (1717), ale zárodečnou formulaci můžeme najít již u Aristotela v souvislosti s jeho diskuzí rovnováhy na páce.

Slovně můžeme princip virtuální práce (2.36) vyjádřit takto:

Práce vykonaná při virtuálním posunutí systému z rovnovážné polohy je nulová.

Situace se dále zjednodušuje v případě, kdy jsou působící síly **konzervativní**, neboli složky vtištěných sil F_i jsou (až na znaménko) složky gradientu příslušné potenciální energie V , $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$. Potom má princip virtuální práce podobu

$$\boxed{\delta V = 0}. \quad (2.37)$$

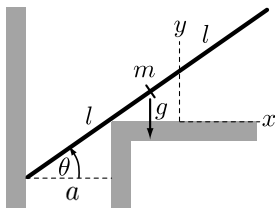
Důkaz je snadný:

$$\delta V = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i = - \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0.$$

Rovnovážná poloha konzervativního systému nastává tedy v **extrému potenciální energie**, resp. v jeho stacionárním bodě. Pokud se jedná o *minimum* V , je rovnovážná poloha *stabilní*. Jestliže naopak jde o *maximum* nebo *sedlový bod* V , poloha je sice rovnovážná, ale *nestabilní*.

⁹ „Virtuální“ práci vykonávají pouze vtištěné síly $\mathbf{F}$, protože při zanedbání tření jsou vazbové síly $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ kolmé na virtuální posunutí (jež leží v rovině tečné k vazbám).

Příklad: Nalezněte rovnovážnou polohu tyčky délky $2l$ opřené o hladkou svislou stěnu a hranu stolu (hrana stolu je od stěny vzdálena a).



Jedinou vtištěnou silou je tíha $(0, -mg, 0)$ soustředěná v těžišti tyčky. Označíme-li kartézské souřadnice těžiště (x_T, y_T, z_T) , redukuje se princip virtuální práce (2.36) na $-mg \delta y_T = 0$ neboli

$$\delta y_T = 0.$$

Parametrizujeme všechny možné polohy tyčky pomocí jejího sklonu, tedy úhlu θ . Z geometrie snadno odvodíme, že výška těžiště y_T je dána funkcí

$$y_T(\theta) = -a \tan \theta + l \sin \theta.$$

Odtud diferencováním dostaneme vztah $\delta y_T \equiv y'_T \delta \theta = (-a \cos^{-2} \theta + l \cos \theta) \delta \theta$. Podmínka rovnováhy $\delta y_T = 0$ musí platit pro každé virtuální posunutí, tedy pro *každé* $\delta \theta$, takže rovnovážná poloha tyčky je dána podmínkou

$$\cos \theta_r = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Tato rovnovážná poloha je však nestabilní, neboť $y''_T(\theta_r) = -3l \sin \theta_r < 0$.

Kapitola 3

Lagrangeův formalismus

Tato kapitola je věnována hlavním pojmům a metodám Lagrangeova formalismu. Nejprve zavedeme efektivnější popis systému pomocí zobecněných souřadnic a pak odvodíme dynamický pohybový zákon známý jako Lagrangeovy rovnice II. druhu. Uvedeme základní věty týkající se integrálů pohybu, jimiž lze tyto rovnice řešit. Užitečnost Lagrangeova přístupu budeme ilustrovat především na významném příkladě pohybu hmotného bodu v poli centrální síly (Keplerova úloha, rozptyl elementárních částic). Závěrem se budeme zabývat problémem pohybu dvou a více vzájemně interagujících těles.

Uvidíme, že Lagrangeův formalismus je velmi elegantní formulací mechaniky. Z jediné výchozí skalární Lagrangeovy funkce L dokáže přímočaře zkonstruovat pohybové rovnice v libovolných vhodných souřadnicích, a navíc implikuje některé triky umožňující nalézt jejich řešení. Neméně důležité je, že formalismus nachází četná zobecnění mimo mechaniku, například v teorii pole a v relativistických či kvantových teoriích.

3.1 Popis systému

Efektivita Lagrangeova formalismu spočívá zejména v tom, že k popisu mechanického systému používá takzvané ***zobecněné souřadnice*** standardně označované symbolem q^j . Jsou to *vhodně zvolené libovolné parametry, které jednoznačně popisují všechny možné konfigurace systému*.

Velká rozmanitost mechanických úloh znemožňuje aplikaci obecně použitelných „univerzálních“ souřadnic, které by *ideálně* popisovaly vývoj každého systému. Samozřejmě, vždy lze například zavést kartézské souřadnice x^i všech hmotných bodů a předepsat působící síly a vazby. Výsledné pohybové rovnice jsou ovšem velmi komplikované. Dokonce už v triviálním případě pohybu jediného hmotného bodu v poli centrální síly je použití kartézských souřadnic dosti nepraktické (příslušné diferenciální rovnice jsou složité), daleko výhodnější je užití sférických souřadnic, které přirozeně vystihují symetrii daného problému.

3.1.1 Zavedení zobecněných souřadnic

Lagrangeův přístup k popisu mechanických systémů je geniálně prostý: vhodné souřadnice „ušije na míru“ daného problému. Přitom eklekticky kombinuje různé typy souřadnic a parametrů – zpravidla vzdálenosti a úhly. Jejich volba přitom není *a priori* ničím předepsána, jediným omezením je, aby zvolené zobecněné souřadnice q^j jednoznačně popisovaly všechny možné polohy hmotných bodů systému, tzv. **konfigurace**.

Je zjevné, že zobecněných souřadnic musí být **tolik, kolik je stupňů volnosti** daného systému,

$$\boxed{q^1, q^2, \dots, q^n}, \quad (3.1)$$

kde $\boxed{n = 3N - v}$, přičemž N je počet hmotných bodů a v je počet vazeb (viz část 2.2 textu). Lagrange tedy účinně používá tzv. *Occamovu břitvu*:¹ „Je zbytečné užívat více tam, kde vystačíme s méně.“ Opravdu, je zbytečné užívat více zobecněných souřadnic, než je nezbytně nutno (tedy než je počet stupňů volnosti). A méně jich také nelze použít, protože počet parametrů by nebyl dostatečný k popisu všech možných konfigurací systému.

Zobecněné souřadnice lze zavést „libovolně“, a proto je naším cílem volit je vždy co nejvhodněji. To vyžaduje trochu zkušenosti a intuice. Pár následujících příkladů ukáže přirozené volby zobecněných souřadnic pro jednoduché mechanické systémy:

Příklady:

matematické kyvadlo

$q^1 = \varphi$... výchylka ze svislé rovnovážné polohy

eliptické kyvadlo

$q^1 = x$... poloha horního tělesa

$q^2 = \varphi$... výchylka závěsu ze svislé polohy

dvě tělesa na pružinách

$q^1 = x_1$... výchylka prvního tělesa z rovnováhy

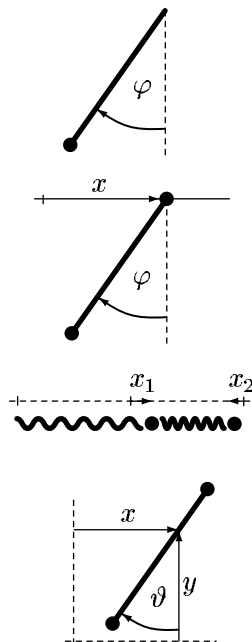
$q^2 = x_2$... výchylka druhého tělesa z rovnováhy

činka

$q^1 = x$... vodorovná souřadnice těžiště

$q^2 = y$... svislá souřadnice těžiště

$q^3 = \vartheta$... natočení činky



¹William Occam (1290–1349), anglický středověký teolog a filozof. Jeho slavný aforismus je často citován i používán. Například Bertrand Russell ve svém díle *History of Western Philosophy* o Occamově břitvě uvádí: „Shledal jsem toto býti neplodnějším principem logické analýzy.“

Obvykle předpokládáme, že existuje **vztah mezi zobecněnými a kartézskými souřadnicemi**

$$\boxed{x^i(q^1, \dots, q^n, t)}, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (3.2)$$

a že je regulární. Jinými slovy: z aktuálních hodnot zobecněných souřadnic můžeme v každém okamžiku jednoznačně stanovit polohu všech hmotných bodů v prostoru pomocí přirozených kartézských souřadnic.

Příklad: pohyb mravence po povrchu koule

Úloha má 2 stupně volnosti. Ideální je zavést sférické úhly (zeměpisné souřadnice) $q^1 = \vartheta$, $q^2 = \varphi$, které jednoznačně určují polohu mravence. Má-li koule poloměr l , je vztah ke kartézským souřadnicím dán standardními rovnicemi

$$\begin{aligned} x^1 &= l \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 &= l \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 &= l \cos \vartheta, \end{aligned}$$

kteří identicky splňují vazbu $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = l^2$, viz (2.4). Každá hodnota zobecněných souřadnic $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ proto jednoznačně odpovídá možné poloze (konfiguraci) mravence na povrchu koule. Pokud by koule byla povrchem nafukujícího se balonku, jednalo by se o rheonomní vazbu, přičemž poloměr by byl konkrétní funkcí času, neboli $l(t)$. Pak by bylo $x^i(\vartheta, \varphi, t)$.

3.1.2 Konfigurační prostor a zobecněné rychlosti

Zobecněné souřadnice $(q^1, \dots, q^n)$ vymezují takzvaný **konfigurační prostor** $\mathcal{Q}$ všech možných poloh (konfigurací) systému. Řečeno geometricky, jedná se o tzv. konfigurační varietu, přičemž $(q^1, \dots, q^n)$ jsou příslušné lokální souřadnice na ní. V předchozím příkladě je konfigurační varietou sféra $\mathcal{S}^2$ a ϑ, φ jsou lokální souřadnice na její obvyklé mapě, jež neobsahuje severní a jižní pól.

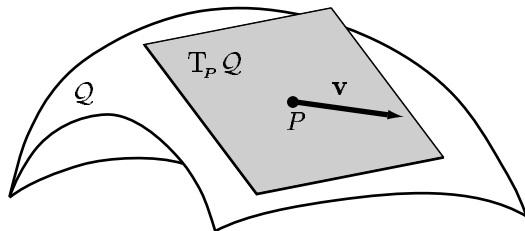
Důležité přitom je, že **konfigurační prostor není prostorem fyzikálních stavů** systému, protože vypovídá pouze o konfiguracích – tedy o *polohách* – všech hmotných bodů. Abychom získali úplnou informaci o fyzikálním stavu, je nutné znát *také jejich rychlosti*. Konfigurační prostor tedy musíme doplnit o tzv. **zobecněné rychlosti** $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. To jsou dodatečné rychlostní parametry, jež jsou obecně *nezávislé* na okamžité poloze. Formálně tedy

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i, \quad \boxed{\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0}, \quad \boxed{\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0}, \quad (3.3)$$

kde δ_j^i je Kroneckerův symbol.

Z hlediska exaktní formulace mechaniky v jazyce diferenciální geometrie představuje konfigurační prostor varietu $\mathcal{Q}$. Její libovolný bod $P \in \mathcal{Q}$ je popsán souřadnicovými parametry $(q^1, \dots, q^n)$ určujícími polohu hmotných bodů systému. Jejich (možné) rychlosti $\mathbf{v}$ jsou v daném místě P *tečné vektory* k varietě $\mathcal{Q}$, leží tedy v lineárním vektorovém tečném prostoru $T_P \mathcal{Q}$. Vektor rychlosti $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$ je v souřadnicové bázi $(\frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n})$, viz vzorec (II-1.6), určen složkami $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Až

spojením obou druhů informací o polohách i rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů daného systému: jde o takzvaný **tečný bandl** TQ , neboli **rychlostní fázový prostor**, dimenze $2n$ parametrizovaný souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Podrobnosti lze najít v *KNIZE DRUHÉ* tohoto konvolutu.



Uvedená struktura rychlostního fázového prostoru poskytuje například přirozené vysvětlení tzv. *Zénónova paradoxu šípů*.² Paradox podle Zénóna spočívá v tom, že nelze navzájem odlišit letící a stojící šíp, když se oba právě nacházejí na stejném místě. Opravdu: z hlediska konfiguračního prostoru Q mají oba stejné hodnoty zobecněných souřadnic q^j . Přesto ale představují odlišné fyzikální stavy určené jinými hodnotami zobecněných rychlostí $\dot{q}^j$: zatímco stojící šíp je určen nulovým vektorem $\mathbf{v} = 0$ z $T_P Q$, šíp letící stejným bodem P danou rychlostí je určen konkrétním nenulovým vektorem $\mathbf{v} \in T_P Q$.

3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu

Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu odvození pohybových rovnic soustavy, jejíž konfigurace jsou vyjádřeny vhodnými zobecněnými souřadnicemi. Takové rovnice se nazývají Lagrangeovy rovnice II. druhu. Z pedagogických důvodů je nejdřív odvodíme pro nejjednodušší jednorozměrnou situaci (takže nebudeme muset psát žádné indexy) a potom rovnice přímočaře zobecníme na libovolný počet zobecněných souřadnic.

3.2.1 Nejjednodušší situace

Uvažujme pro jednoduchost nejprve **jednorozměrný pohyb jediné částice** hmotnosti m podél kartézské osy x . Nechť zobecněná souřadnice je q , přičemž vztah mezi ní a kartézskou polohou x je obecně $x(q, t)$. Pro konkrétní trajektorii $q(t)$ odtud dostáváme

$$x(t) = x(q(t), t), \quad \text{takže} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Nyní můžeme snadno spočítat **kinetickou energii** částice, kterou budeme označovat symbolem T :

$$T(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2. \quad (3.5)$$

²Zénón z Eleje (490–430 př. n. l.), proslulý řecký filozof a žák Parmenidův, se proslavil zejména svými aporiemi: „letící šíp je v klidu“, „Achilleus nikdy nedohoní želvu“ a podobně.

Všechny tyto funkce závisejí na čase, neboť je vyčísľujeme podél trajektorie $q(t)$. Protože však výraz (3.5) platí *pro každou trajektorii a v každém fixním okamžiku* t_0 , musí v t_0 platit vztah

$$T(q, \dot{q}, t_0) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q}(q, t_0) \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t_0) \right)^2, \quad (3.6)$$

kde

$$q = q(t_0) \text{ je okamžitá poloha} \quad \text{a} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0) \text{ je okamžitá rychlost.}$$

Jestliže nyní budeme v zafixovaném čase t_0 zobecněnou souřadnici q a zobecněnou rychlost $\dot{q}$ chápat jako *navzájem nezávislé parametry*, dostaneme parciálním derivováním (3.6) rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Tyto vztahy opět musí platit v *každém okamžiku* t_0 *libovolné trajektorie* $q(t)$. Proto můžeme získat *časové vyjádření vývoje* obou veličin (3.7), (3.8) prostým dosazením

$$q = q(t) \quad \text{a} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}(t),$$

tedy

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \right] = m \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right), \quad (3.10)$$

kde v druhých rovnostech jsme uplatnili vztah (3.4) a jeho analogii pro $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)$. Odečteme-li nyní od úplné časové derivace prvního výrazu druhý výraz, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + m \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) - m \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.11)$$

protože druhý a třetí výraz se navzájem odečtou. Pravou stranu (3.11) lze pomocí Newtonovy pohybové rovnice již snadno vyjádřit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} = F \frac{\partial x}{\partial q} \equiv Q, \quad (3.12)$$

kde Q je **zobecněná síla**, což je průmět obvyklé „kartézské“ síly F do směru tečného vektoru (ne nutně jednotkového) k zobecněné souřadnici q . Tím jsme odvodili

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q}, \quad (3.13)$$

což je **Lagrangeova rovnice II. druhu** (Joseph Louis Lagrange, 1788). Je to vyjádření pohybového zákona klasické mechaniky v libovolné jedné zobecněné souřadnici. Výraz na levé straně přitom musíme chápat jako užitečnou zkratku pro operaci, která odpovídá výše uvedenému odvození, tedy postupu:

- vyjdeme z obvyklého „kartézského“ vztahu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$
- vyjádříme ho pomocí zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí, viz (3.6)
- tento výraz $T(q, \dot{q}, t_0)$ parciálně zderivujeme podle nezávislých parametrů $\dot{q}$ a q
- do těchto vztahů dosadíme za parametr q funkci $q(t)$ a za parametr $\dot{q}$ funkci $\frac{dq}{dt}(t)$
- první z takto získaných funkcí $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)$ zderivujeme úplně podle času t
- odečteme od ní druhou funkci $\frac{\partial T}{\partial q}(t)$ a celý výraz položíme roven zobecněné síle Q

Uvedenou procedurou dostaneme vztah (3.13), což je z matematického hlediska jedna obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu pro hledanou funkci $q(t)$.

3.2.2 Nejobecnější situace

Výše uvedený postup platný pro jeden hmotný bod m pohybující se podél jediné kartézské osy x lze snadno zobecnit na situaci, kdy se mechanický systém skládá z N **hmotných bodů**, jež se pohybují v třírozměrném prostoru. Vě standardním kartézském popisu (viz část 2.2.1) tedy máme souřadnice x^1, x^2, x^3 , jež popisují polohu prvního hmotného bodu hmotnosti $m^{(1)}$, souřadnice x^4, x^5, x^6 , jež popisují polohu druhého hmotného bodu hmotnosti $m^{(2)}$, atd. Je také užitečné zavést soustavu $3N$ konstant m_i předpisem $m_1 = m_2 = m_3 = m^{(1)}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m^{(2)}$, atd. Díky tomuto formalismu lze **celkovou kinetickou energii** soustavy hmotných bodů vyjádřit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2. \quad (3.14)$$

Nechť je tato soustava podrobena celkem v **holonomním vazbám** (to jest vazbám nezávislým na rychlosti pohybu) tvaru $\phi_\nu(x^i, t) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, v$. Připouštíme však časovou závislost (tedy vazby rheonomní). Pak lze vždy lokálně zvolit zobecněné souřadnice q^j , $j = 1, 2, \dots, n$, tedy nezávislé parametry q^j takové, že pro libovolnou jejich hodnotu (z vhodného definičního oboru) jsou všechny holonomní vazby $\phi_\nu = 0$ *identicky splněny*.³ Za předpokladu dostatečné hladkosti vazeb musí existovat funkce (3.2), to jest $x^i = x^i(q^j, t)$. Pro libovolnou trajektorii $q^j(t)$ tak dostáváme

$$x^i(t) = x^i(q^j(t), t), \quad \text{takže} \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (3.15)$$

³Geometricky řečeno: zobecněné souřadnice q^j jsou souřadnice lokální mapy atlasu pokrývajícího konfigurační varietu $\mathcal{Q}$ definovanou vazbami $\phi_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, v$, viz části 1.1.1 a 2.2 v *KNIZE DRUHÉ*. Zde je tato varieta $\mathcal{Q}$ hladkým podprostorem dimenze $n = 3N - v$ vnořeným do eukleidovského prostoru s $3N$ kartézskými souřadnicemi x^i .

kde v indexu k používáme Einsteinovo sumační pravidlo $\sum_{k=1}^n$. Dosazením do výrazu (3.14) obdržíme pro celkovou kinetickou energii *ve fixním čase* t_0 vztah

$$T(q^j, \dot{q}^j, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2, \quad (3.16)$$

kde funkce $\frac{\partial x^i}{\partial q^k}$ a $\frac{\partial x^i}{\partial t}$ závisejí dle (3.2) jen na q^j a případně na t_0 . V tomto vyjádření, které zobecňuje (3.6), již vystupují zobecněné rychlosti $\dot{q}^j$ a zobecněné souřadnice q^j jako *nezávislé parametry*, viz (3.3). Parciálními derivacemi (3.16) tedy dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial}{\partial q^l} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \right]. \quad (3.18)$$

Nyní provedeme proceduru „zpětného“ dosazení časových funkcí $q^k(t)$ za příslušné parametry q^k a funkcí $\frac{dq^k}{dt}(t)$ za parametry $\dot{q}^k$. Užitím vztahu (3.15) dostaneme *časovou závislost* těchto výrazů *podél libovolné trajektorie*,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right). \quad (3.20)$$

Odtud již snadno pomocí Newtonových pohybových rovnic (2.9) plyne, že

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) - \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \equiv Q_j. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tím jsme odvodili **Lagrangeovy rovnice II. druhu** v jejich nejobecnějším tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

Jedná se o vyjádření pohybových rovnic mechanického systému v libovolných zobecněných souřadnicích q^j . Matematicky jde o soustavu $n = 3N - v$ obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro n neznámých funkcí $q^j(t)$, jež popisují trajektorie částic. Je jich tedy právě tolik, kolik je stupňů volnosti daného systému. Dynamika je přitom určena jedinou skalární veličinou, totiž celkovou kinetickou energií T soustavy, a složkami působících zobecněných sil Q_j .

3.2.3 Potenciál a Lagrangeova funkce

Za příhodných okolností lze Lagrangeovy rovnice ještě více zjednodušit. Především ve fyzikálně důležitých situacích, kdy na hmotné body působí jen **konzervativní síly**,⁴ lze obecně komplikované složky zobecněných sil Q_j vyjádřit pomocí jediné skalární funkce, totiž **potenciálu** V (přesněji bychom měli říkat „potenciální energie“). Opravdu, v takovém případě je

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (3.23)$$

Jestliže dosadíme toto vyjádření zobecněných sil na pravou stranu rovnice (3.22) a uvážíme, že členy $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}$ jsou identicky nulové (síly jsou konzervativní a potenciál V proto nemůže záviset na zobecněných rychlostech), můžeme **Lagrangeovy rovnice II. druhu** přepsat do prostého tvaru

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \right], \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

kde funkce $L(q^j, \dot{q}^j, t)$ je definována jako **rozdíl kinetické a potenciální energie**

$$L \equiv T - V \quad (3.25)$$

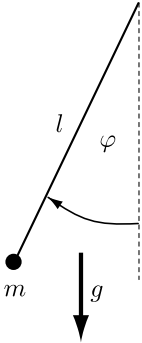
a nazývá se **Lagrangeova funkce** (neboli **lagrangián**) daného mechanického systému. Vidíme, že pohybové rovnice lze získat přímočarou kombinací (3.24) partiálních derivací z *jediné skalární funkce* L . Právě v tom spočívá velká užitečnost Lagrangeova formalismu: oproti obvyklému newtonovskému postupu již není třeba provádět složité rozklady působících sil do směrů jednotlivých souřadnic. Navíc automaticky dostaneme právě jen tolik rovnic, kolik je stupňů volnosti studovaného systému.

Lagrangeovy rovnice (3.24) lze použít v důležitých situacích s konzervativním polem, například pro:

- **homogenní gravitační pole** $V = mgz$
- **centrální gravitační pole** $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha = GMm$ (3.26)
- **harmonický oscilátor** $V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

⁴Připomeňme, že silové pole $\mathbf{F}$ je konzervativní právě tehdy, když vykonaná práce nezávisí na dráze (pouze na koncových bodech), neboli když je práce po libovolné uzavřené dráze nulová. To je ekvivalentní podmínce, že $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, což nastává právě tehdy, když existuje potenciál V takový, že $\mathbf{F} = -\text{grad } V$.

Příklad: *Odvodte pohybovou rovnici matematického kyvadla.*



Konfiguračním prostorem (varietou) $\mathcal{Q}$ je *kružnice* poloměru l . K popisu polohy hmotného bodu m stačí *jediná* zobecněná souřadnice q , a za ni je přirozené zvolit *úhel* φ určující výchylku z dolní rovnovážné polohy. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, protože rychlost kruhového pohybu je $v = l\dot{\varphi}$. Potenciální energie v homogenním gravitačním poli je $V = mgz$, kde osa z míří vzhůru. Z geometrie vidíme, že $-z = l \cos \varphi$, tedy $V = -mgl \cos \varphi$. Lagrangeova funkce $L(\varphi, \dot{\varphi}) \equiv T - V$ má proto tvar

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (3.27)$$

Její parciální derivace jsou $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$ a $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$. Po „zapnutí času“ dávají Lagrangeovy rovnice (3.24) $ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$ neboli

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (3.28)$$

Kvůli nelinearitě není exaktní řešení této diferenciální rovnice snadné (je dáno tzv. *eliptickými integrály*). Pro *malé výchylky* lze však použít Taylorův rozvoj funkce sinus, čímž dostaneme *linearizovanou* rovnici $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$. To je rovnice *harmonického oscilátoru* s úhlovou frekvencí kmitů $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Exaktní řešení a podrobný rozbor úlohy je obsahem příkladu 1-5 v *KNIZE TŘETÍ*.

3.2.4 Zobecněný potenciál

Jednoduchý tvar (3.24) Lagrangeových rovnic II. druhu platí dokonce i v obecnějších situacích, kdy silové pole již není konzervativní, ale existuje takzvaný **zobecněný potenciál**. Tím myslíme situaci, kdy působící síla má takový charakter, že k ní existuje funkce $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ taková, že

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (3.29)$$

Zobecnění spočívá v tom, že *připouštíme také závislost na zobecněných rychlostech a čase* (obyčejný potenciál smí záviset pouze na souřadnicích). Je zjevné, že dosazením (3.29) na pravou stranu obecných pohybových rovnic (3.22) opět dostaneme Lagrangeovy rovnice II. druhu ve tvaru (3.24), kde Lagrangeova funkce je dána $L = T - V = T(q^j, \dot{q}^j, t) - V(q^j, \dot{q}^j, t)$, tedy opět předpisem (3.25). Pro případ konzervativních sil se (3.29) samozřejmě redukuje na jednodušší vztah (3.23).

Zdálo by se, že zde popsáný případ je umělý, neboť předpokládá platnost poměrně složitěho vztahu (3.29). Podivuhodná příroda ale kupodivu takovouto speciální možnost opravdu realizuje, například ve velmi důležitém případě **elektromagnetické interakce**. Opravdu, přímým výpočtem lze ukázat (viz příklad 3-13

v *KNIZE TŘETÍ*), že pro elektromagnetickou **Lorentzovu sílu** $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ existuje zobecněný potenciál $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ tvaru

$$V = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (3.30)$$

kde φ je skalární (elektrický) potenciál, zatímco $\mathbf{A}$ je vektorový potenciál. Souvislost vektorových elektromagnetických polí a příslušných potenciálů je dána známými vztahy $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Možnost popsat pohyb částic v obecném elektromagnetickém poli pomocí Lagrangeovy funkce je velmi vítaná jak po stránce teoretické, tak i praktické a nachází své přirozené zobecnění také v relativistické či kvantové teorii.

Praktická „Lagrangeova kuchařka“ pro sestavení pohybových rovnic
tedy zní takto:

1. Určíme počet stupňů volnosti n a zavedeme vhodné zobecněné souřadnice q^j , $j = 1, \dots, n$ (neboli n parametrů q^j jednoznačně popisujících pohyb soustavy v souladu s vazbami).
2. Vyjádříme kartézské souřadnice x^i pomocí zobecněných souřadnic q^j , tedy určíme vztahy $x^i(q^j, t)$, kde $i = 1, \dots, 3N$, $j = 1, \dots, n$.
3. Vypočteme kartézské rychlosti $\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d}{dt}[x^i(q^j(t), t)]$ a $\frac{dq^j}{dt}(t)$ zaměníme za $\dot{q}^j$.
4. Dosazením do definice kinetické energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2$ získáme $T(q^j, \dot{q}^j, t)$.
5. Dosazením $x^i(q^j, t)$ do potenciální energie $V(x^i)$ vypočteme $V(q^j, t)$, případně najdeme zobecněný potenciál $V(q^j, \dot{q}^j, t)$.
6. Stanovíme Lagrangeovu funkci $L = T - V$.
7. Jejím derivováním a kombinací získáme Lagrangeovy pohybové rovnice $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$.

3.2.5 Příklad: částice v centrálním poli

Jako ilustraci zkoumejme nyní pohyb hmotného bodu v poli centrální síly. Budeme postupovat podle výše uvedeného návodu:

1. Máme jediný hmotný bod v třírozměrném prostoru a žádnou vazbu, takže $n = 3$. Síla v centrálním poli je vždy radiální a její velikost závisí jen na vzdálenosti od centra, kde zvolíme počátek. Za tři zobecněné souřadnice q^1, q^2, q^3 je tedy přirozené zvolit standardní **sférické souřadnice** r, ϑ, φ .
2. Vztahy $x^i(q^j)$ jsou obvyklá vyjádření kartézských souřadnic sférickými, tedy

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3. Kartézské složky rychlosti získáme úplnou časovou derivací (3.31):

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{dx^2}{dt} &= \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{dx^3}{dt} &= \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

4. Dosazením (3.32) do obvyklého kartézského výrazu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right]$ zjistíme, že řada členů vypadne, zatímco zbylé se zkombinují do jednoduchého vztahu pro kinetickou energii ve sférických souřadnicích:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2). \quad (3.33)$$

(Všimněte si, že T je kvadratická diagonální forma zobecněných rychlostí $\dot{q}^j$.)

5. Centrální silové pole je sféricky symetrické, a proto příslušná potenciální energie V nemůže záviset na úhlových zobecněných souřadnicích ϑ, φ . Proto je $V(r)$. Opravdu: provedením gradientu na tuto skalární funkci dostaneme, že příslušná síla má pouze radiální složku, přičemž její velikost závisí jen na vzdálenosti r od centra.
6. Lagrangeova funkce L ve sférických souřadnicích tedy má tvar

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(r)}. \quad (3.34)$$

7. Parciální derivace této Lagrangeovy funkce podle zobecněných rychlostí $\dot{q}^j$ a nazávislých zobecněných souřadnic q^j jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= m\dot{\vartheta}^2 + m\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= mr^2\dot{\vartheta}, & \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Lagrangeovy rovnice II. druhu (3.24) jsou tedy explicitně:

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - m\dot{\vartheta}^2 - m\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} &= 0, \\ (mr^2\dot{\vartheta})' - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ (mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi})' &= 0,\end{aligned}\quad (3.36)$$

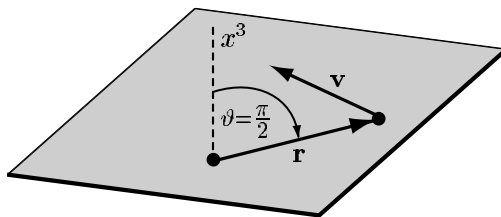
kde tečka nad symbolem (či za závorkou) značí úplnou časovou derivaci příslušné funkce. Z matematického hlediska je to tedy soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic pro tři hledané funkce $r(t), \vartheta(t), \varphi(t)$.

Nyní obrátíme pozornost na *řešení* pohybových rovnic (3.36). Soustava vypadá složitě: proměnné jsou navzájem provázány a rovnice jsou nelineární. Při bližším pohledu ovšem můžeme učinit důležitý exaktní závěr: **pohyb částice v libovolném centrálním poli je nutně rovinný.**

Důkaz této skutečnosti není těžký. Druhou diferenciální rovnici v (3.36) rozepíšeme do explicitního tvaru

$$\ddot{\vartheta} = \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\vartheta}. \quad (3.37)$$

Bez újmy na obecnosti ale můžeme předpokládat *počáteční podmínky* $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta} = 0$ v čase $t = 0$. (Využijeme volnosti při zavádění sférických zobecněných souřadnic: stačí na počátku orientovat kartézskou osu x^3 v (3.31) tak, aby mířila kolmo na „rovňovou rovinu“ definovanou vektorem polohy $\mathbf{r}$ částice vůči centru a vektorem rychlosti $\mathbf{v}$ této částice v počátečním čase $t = 0$.)



Při této volbě pak z diferenciální rovnice (3.37) ihned plyne, že v $t = 0$ je $\ddot{\vartheta} = 0$. To znamená, že složka zrychlení částice ve směru *mimo* rovinu $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ je nulová, a proto částice nemůže tuto rovňovou rovinu nikdy opustit. Matematicky tento fakt plyne z *věty o jednoznačnosti řešení* rovnice (3.37) ve tvaru $\vartheta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ pro dané počáteční podmínky.⁵

Pohyb v poli centrální síly je tedy nutně rovinný. Přestože jsme začali obecnou možností pohybu částice ve třírozměrném prostoru, její skutečný pohyb je efektivně jen dvourozměrný: omezuje se na jedinou rovinu. Později uvidíme, že z fyzikálního pohledu je tato skutečnost důsledkem zachování momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$ částice v daném systému (moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ totiž vymizí, protože vektor $\mathbf{F}$ je radiální, a tedy kolineární s polohovým vektorem $\mathbf{r}$).

☒

Úloha se tedy bez újmy na obecnosti redukuje na *dvojměrný problém*. Je proto přirozené v rovině pohybu za zobecněné souřadnice q^1, q^2 zvolit standardní **polární souřadnice** r, φ , které s kartézskými souřadnicemi souvisejí vztahy

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.38)$$

⁵Podstatou důkazu je rozvinutí funkce $\vartheta(t)$ do Taylorova rozvoje, tedy $\vartheta(t) = \vartheta(0) + \dot{\vartheta}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}(0)t^2 + \dots$, kde $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$. V důsledku rovnice (3.37) je $\ddot{\vartheta}(0) = 0$, a v důsledku derivací této rovnice také v počátečním čase $t = 0$ vymizí všechny vyšší derivace funkce $\vartheta(t)$.

(je to vlastně speciální případ (3.31) pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$). Když nyní aplikujeme kuchařku uvedenou v úvodu této části textu, dostaneme Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)} \quad (3.39)$$

a odtud získáme Lagrangeovy rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= -\frac{dV}{dr}, \\ (mr^2\dot{\varphi})' &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tyto rovnice samozřejmě plynou i z (3.36) pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Rozborem jejich řešení se budeme zabývat v následující části 3.4.

3.3 Řešení pohybových rovnic a integrály pohybu

Lagrangeovy rovnice II. druhu poskytují jasný a praktický algoritmus pro efektivní sestavení pohybových rovnic. Obecně existují tři možné přístupy, jak takto získané diferenciální rovnice vyřešit:

- **numerické řešení:** V dnešní době velmi výkonných počítačů není problém napsat tvar příslušné soustavy obyčejných diferenciálních rovnic do vhodného programovacího prostředí (např. MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB atd.) a po zvolení konkrétních počátečních podmínek odpovídající numerické řešení vykreslit. Je však třeba mít na paměti, že při numerickém řešení vyvstává problém spolehlivosti získaných výsledků. Nutně vznikají numerické chyby, které mohou v okolí nestabilních bodů narůstat a získané řešení pak neodpovídá skutečnému. Existují sofistikovanější numerické metody, které umožňují mít přesnost výpočtů pod kontrolou. Vždy je ale užitečné mít teoretický vhled do charakteru řešení a výsledek pomocí něj pečlivě testovat, například vhodnými zachovávajícími se veličinami.
- **přibližné řešení:** Soustava pohybových rovnic je obecně složitá, a tak není snadné najít její přesné řešení. Největším problémem je, když jsou diferenciální rovnice *nelineární*, neboť pak neplatí princip superpozice elementárních řešení. V takovém případě obvykle namísto přesného řešení hledáme jen řešení přibližné: **zanedbáme nelineární členy** a pak standardním postupem řešíme příslušné aproximované lineární rovnice. Provedení správné linearizace je svého druhu „umění“, neboť teprve praxí lze získat zkušenost, které zanedbání členů je fyzikálně oprávněné a konzistentní.

Ilustrace linearizace: *matematické kyvadlo*. Je-li zobecněnou souřadnicí výchylka φ , má Lagrangeova funkce tvar $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$, příslušná rovnice (3.24) pak je $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$, viz (3.27) a (3.28). Tato nelineární diferenciální rovnice nemá jednoduché řešení, ale snadno můžeme provést její

linearizaci pro malé výchylky $\varphi \ll 1$. Taylorův rozvoj říká, že v takovém případě $\sin \varphi \approx \varphi$, takže $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0$. To je jednoduchá lineární rovnice známá jako rovnice harmonického oscilátoru: jejím řešením jsou harmonické kmity $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta)$, kde φ_0, δ jsou integrační konstanty odpovídající amplitudě a fázi. Poznamenejme, že linearizovanou pohybovou rovnici lze získat předpisem (3.24) také z Lagrangeovy funkce rozvinuté *do druhého řádu* v proměnné φ , tedy z $L \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2)$.

- **přesné řešení:** Je samozřejmě nejlepší, když se nám podaří najít exaktní řešení přesných pohybových rovnic. To je veskrze úloha matematická, při níž musíme uplatnit zručnost a zkušenosti získané v matematických kurzech. Doporučuje se použít také speciální literaturu a tabulky řešení diferenciálních rovnic.

Je také pozoruhodné, že Lagrangeův formalismus, který umožňuje efektivně sestavit pohybové rovnice, nám současně poskytuje *triky pro jejich řešení!* Jedná se především o konstruktivní postup nalezení tzv. integrálů pohybu (neboli „prvních integrálů pohybových rovnic“), což jsou speciální veličiny, které v průběhu pohybu nemění svoji hodnotu. Začneme jejich definicí a pak uvedeme několik základních vět:

Integrál pohybu je výraz tvaru $f(q^j, \dot{q}^j)$, který v každém čase t nabývá stejné hodnoty, když ho vyčíslíme podél libovolné trajektorie $q^j(t)$ řešící pohybové rovnice daného systému.

Přesněji řečeno: jestliže do funkce f dosadíme za zobecněnou souřadnici q^j funkci $q^j(t)$ popisující skutečný pohyb, a za zobecněnou rychlost $\dot{q}^j$ její časovou derivaci $\frac{dq^j(t)}{dt}$, dostaneme funkci $f(t) \equiv f(q^j(t), \dot{q}^j(t))$. *Hodnota této funkce je konstantní*, tedy na čase nezávislá (pro různé trajektorie $q^j(t)$ je ale příslušná hodnota $f(t) = \text{konst.}$ obecně různá). Pro integrál pohybu tedy platí

$$f(q^j(t), \dot{q}^j(t)) = \text{konst.} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0}. \quad (3.41)$$

Uveďme nyní dvě významné věty:

Pokud Lagrangeova funkce L nezávisí na zobecněné souřadnici q^i (v tom případě říkáme, že q^i je takzvaná „cyklická souřadnice“), pak výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ je integrálem pohybu.

Důkaz je snadný. Z n Lagrangeových rovnic II. druhu (3.24), kde index j nabývá hodnot $1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$, vezmeme právě i -tou, tedy $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Dle předpokladů věty vymizí druhý člen, takže

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0.$$

Porovnáním s (3.41) vidíme, že $f \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ je integrál pohybu, čímž je důkaz dokončen.

☒

Příklady: Pro volnou částici je $V = 0$, a proto $L = T$, tedy

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Všechny tři kartézské souřadnice jsou zjevně cyklické, a tak věta ihned implikuje tři integrály pohybu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} = a, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} = b, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} = c,\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou konstanty. Jde samozřejmě o zákon zachování hybnosti. Kdybychom uvažovali částici v homogenním gravitačním poli, měli bychom Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

V tomto případě jsou cyklické pouze souřadnice x a y . Ve svislém směru souřadnice z zákon zachování hybnosti neplatí, protože veličina $m\dot{z}$ při volném pádu částice narůstá.

Pokud Lagrangeova funkce L nezávisí explicitně na čase t , pak výraz

$$h(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L \quad (3.42)$$

(tzv. „zobecněná energie“) je integrálem pohybu.

Důkaz: Přímou z definice dostaneme

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial t} \dot{q}^j \right],$$

přičemž v souladu s předpokladem věty již nepíšeme člen $-\frac{\partial L}{\partial t}$. Druhý a čtvrtý člen se navzájem vyruší a zbylé dva lze přepsat do tvaru

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right] \dot{q}^j.$$

Výraz v hranaté závorce je ovšem levá strana Lagrangeovy rovnice (3.24), která je pro skutečný pohyb rovna nule, a proto $\frac{dh}{dt} = 0$, takže h je integrálem pohybu.

☒

Příklad: Pro částici v kartézských souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

takže

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = T + V.$$

V tomto případě se tedy v průběhu děje zachovává celková mechanická energie.

Není ale pravda že zachovávající se zobecněná energie h je **vždy** rovna součtu kinetické energie T a potenciální energie V . Například *rheonomní vazby soustavě energii dodávají nebo ji odebírají* (ilustrací je třeba korálek na drátu otáčejícím se konstantní úhlovou rychlostí).

Můžeme však vyslovit například následující jednoduchou větu:

Pokud jsou síly konzervativní a jsou-li vazby holonomní a současně skleronomní, pak $h = T + V = \text{konst.}$ (celková mechanická energie soustavy se zachovává).

Důkaz: Holonomní a skleronomní vazby mají tvar $\phi(x^i) = 0$, a tudíž $\dot{x}^i = x^i(q^j)$, viz (3.2). Pak

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \right) \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s \right)$$

a definujeme-li (symetrickou) matici

$$A_{rs}(q^j) \equiv \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s},$$

můžeme kinetickou energii soustavy vyjádřit

$$T = \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s.$$

To je zjevně kvadratická funkce v zobecněných rychlostech, a proto

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j = \sum_{j,r,s=1}^n (A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s) \dot{q}^j = 2 \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s = 2T$$

(ve skutečnosti jsme právě dokázali speciální případ Eulerovy věty o homogenních funkcích). Nyní už snadno pro potenciál (jenž je nutně nezávislý na rychlostech) z definice (3.42) odvodíme

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = 2T - T + V = T + V.$$

Nyní ukážeme aplikaci předchozích vět, a to na příkladě pohybu hmotného bodu v centrálním poli. Jak uvidíme, jedná se o fyzikálně důležitou situaci, která souvisí nejenom s pohybem planet, ale také například s rozptylem elementárních částic.

3.4 Pohyb v poli centrální síly

V předchozí části 3.2.5 jsme dokázali, že pohyb částice v centrálním silovém poli je nutně rovinný, a proto postačuje zavést polární souřadnice r, φ v „rovňkové rovině“. V těchto zobecněných souřadnicích má Lagrangeova funkce tvar (3.39), tedy $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$.

Pro nalezení možných pohybů s výhodou použijeme integrály pohybu:

- *souřadnice φ je cyklická*, takže veličina $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ je integrál pohybu. Konkrétně to znamená, že

$$mr^2\dot{\varphi} = l = \text{konst.} \quad (3.43)$$

Jedná se zjevně o zákon zachování momentu hybnosti $l \equiv |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times m \mathbf{v}|$.

- *Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase*, takže se zachovává zobecněná energie, která je v tomto případě rovna celkové mechanické energii $T + V = E$,

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{konst.} \quad (3.44)$$

Namísto řešení pohybových rovnic 2. řádu (3.40) tedy bez újmy na obecnosti stačí řešit jen integrály pohybu (3.43) a (3.44). To jsou dvě obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu (obsahující již dvě integrační konstanty l a E) pro dvě námi hledané funkce $r(t)$ a $\varphi(t)$. Nabízí se z rovnice (3.43) vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (3.45)$$

a pak dosadit do rovnice (3.44), čímž úpravou dostaneme

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \right) \right]. \quad (3.46)$$

Po odmocnění (kdy $\dot{r} > 0$ odpovídá vzdalování) lze tuto rovnici vyřešit separací proměnných:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - (V(r) + \frac{l^2}{2m} r^{-2})]}}. \quad (3.47)$$

Stačí tedy najít tento jediný integrál (provést tzv. kvadraturu) a invertovat ho. Pro obecný tvar potenciálu $V(r)$ je to analyticky obtížné, explicitně se dají vyčíslit jen jisté speciální případy, a i ty obvykle nejsou v explicitním nýbrž parametrickém

tvaru. Teoreticky však lze získat funkci $r(t)$. Dosazením do rovnice (3.45) a provedením další integrace separací proměnných lze získat funkci $\varphi(t)$, čímž je úloha nalézt trajektorii hmotného body v daném centrálním poli kompletně vyřešena.

Je zajímavé, že pro **určení tvaru trajektorie** v polárních souřadnicích $r(\varphi)$ není často nutné úlohu nejprve dle předchozího postupu vyřešit a následně pak vyloučit časovou závislost z funkcí $r(t)$ a $\varphi(t)$. Můžeme postupovat přímo užitím **Binetova vzorce**

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du}}, \quad (3.48)$$

kde proměnná u je inverzní radiální vzdálenost

$$u = \frac{1}{r}. \quad (3.49)$$

Důkaz: Protože $r = \frac{1}{u(\varphi)}$, dostáváme časovou derivaci a užitím vztahu (3.45)

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\varphi}.$$

Dosazením do rovnice (3.46) získáme

$$\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2} u^2 = \frac{2}{m} [E - V(u)], \quad (3.50)$$

jehož derivací podle proměnné φ a zkrácení konstantami obdržíme

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du} \frac{du}{d\varphi}.$$

Pro případ $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ lze tímto společným faktorem vydělit, čímž opravdu dospějeme k (3.48).

☒

Zadáme-li do Binetova vzorce konkrétní potenciál $V(r(u))$, získáme obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu pro funkci $u(\varphi)$, jejíž inverzí $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$ najdeme hledaný tvar trajektorie.

3.4.1 Pohyb planet aneb Keplerova úloha

Důležitým příkladem pohybu v centrálním poli jsou trajektorie planet a jiných těles obíhajících v gravitačním poli Slunce. Ukážeme nyní, jak z výše uvedené Lagrangeovy formulace mechaniky snadno plynou Keplerovy zákony.

Gravitační pole Slunce hmotnosti M je dáno potenciálem (3.26),

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GMm \text{ je kladná konstanta.} \quad (3.51)$$

V reciproké souřadnici (3.49) má potenciál tvar $V = -\alpha u$. Jeho derivace je $\frac{dV}{du} = -\alpha$, takže Binetův vzorec (3.48) je nyní explicitně

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}.$$

Ihned najdeme obecné řešení této lineární diferenciální rovnice s konstantní pravou stranou. Obecné řešení homogenní rovnice je $u_0 = C \cos \varphi$ (bez újmy na obecnosti můžeme položit počáteční fázi $\varphi_0 = 0$) a partikulární řešení úplné rovnice je zjevně $u_p = \frac{\alpha m}{l^2}$. Úplné řešení tedy je $\frac{1}{r} = u = u_p + u_0 = \frac{\alpha m}{l^2} + C \cos \varphi = \frac{\alpha m}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$, kde konstanta ε nahrazuje C . Máme tedy

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}}, \quad (3.52)$$

kde konstanty jsou dány

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}, \quad (3.53)$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2l^2 E}{\alpha^2 m} = \frac{2l^2 E}{G^2 M^2 m^3}. \quad (3.54)$$

Důkaz relace (3.54): Dosazením kompletního řešení (3.52), tedy $u = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a z něj plynoucí derivace $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi$ do rovnice (3.50) dostaneme

$$\frac{1}{p^2}(\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) = \frac{2m}{l^2}[E + \alpha u] = \frac{2m}{l^2}\left[E + \frac{\alpha}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)\right],$$

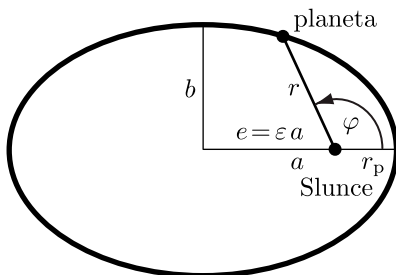
což po úpravě dává $1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi = \frac{2mp^2}{l^2}E + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a tedy opravdu platí $\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2}E$. Důvod proč je integrační konstanta ε z Binetova vzorce takto jednoznačně učena spočívá v tom, že Binetova diferenciální rovnice 2. řádu (3.48) vznikla derivací původní rovnice (3.50) 1. řádu, kde jako fyzikální parametr vystupuje integrál pohybu E , který při derivování vypadl.

☒

Dospěli jsme k pěknému výsledku: **tělesa se ve Sluneční soustavě pohybují po kuželosečkách**, protože rovnice (3.52) není nic jiného než obvyklé vyjádření kuželoseček v polárních souřadnicích s ohniskem v počátku $r = 0$, kde je umístěno Slunce. V závislosti na parametru ε zvaném **numerická excentricita** totiž funkce (3.52) popisuje kružnici ($\varepsilon = 0$), elipsu ($0 < \varepsilon < 1$), parabolu ($\varepsilon = 1$) resp. hyperbolu ($\varepsilon > 1$). Podle (3.54) tyto čtyři možné situace odpovídají případům, kdy celková zachovávaná se mechanická energie je $E = E_{\min} \equiv -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2} < 0$, $E < 0$, $E = 0$, resp. $E > 0$. Druhý parametr p , který určuje **velikost** kuželosečky (3.52), je podle (3.53) určen (kromě hmotností Slunce a obíhajícího tělesa) zachovávaným se momentem hybnosti l . Výše uvedeným postupem jsme tedy odvodili první z Keplerových zákonů:

1. **Keplerův zákon**: Planety se pohybují po elipsách se Sluncem v ohnisku.
2. **Keplerův zákon**: Spojnice Slunce a planety opisuje za stejné časové intervaly stejné plochy.
3. **Keplerův zákon**: Pro všechny planety je podíl $\frac{T^2}{a^3}$ stejná konstanta.

Důkaz: Planeta se nemůže vymanit z gravitačního potenciálu Slunce, a proto je její celková mechanická energie E záporná. Dle (3.54) je proto nucena obíhat po eliptické orbitě (3.52) s $\varepsilon < 1$. Je to uzavřená trajektorie, která je 2π periodická.⁶



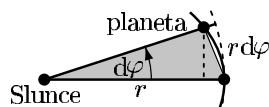
Perihelium (přísluní) nastává pro $\varphi = 0$ a má hodnotu $r_p = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Naopak afelium (odsluní) nastává pro $\varphi = \pi$ a má hodnotu $r_a = \frac{p}{1-\varepsilon}$. Geometricky je elipsa určena hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b , přičemž $a^2 = b^2 + e^2$. Protože excentricita e je dána vztahem $e \equiv \varepsilon a$, můžeme z jednoduchého vztahu $r_p = a - e$ případně $r_a = a + e$ odvodit, že $p = a(1 - \varepsilon^2)$. Dosazením z (3.53) a (3.54) tak ihned dostáváme

$$a = \frac{GMm}{2|E|}. \quad (3.55)$$

Hlavní polosa eliptické dráhy a je tedy (kromě konstantních hmotností) určena celkovou energií planety E a *nezávisí* na jejím momentu hybnosti l .

Druhý Keplerův zákon je vlastně jen geometrickým vyjádřením *zákona zachování momentu hybnosti* (3.43). Plošná rychlost, tedy plocha dS opsaná spojnici Slunce s planetou za krátký časový interval dt , je dána výrazem $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$.

Opravdu, jak je vidět z vedlejšího obrázku, plochu dS lze dobře aproximovat plochou šedě vyznačeného trojúhelníka. Jeho základna je r a čárkovaně vyznačená výška je pro $d\varphi \rightarrow 0$ rovna $r d\varphi$, což je délka oblouku kružnice poloměru r se středovým úhlem $d\varphi$. Máme tedy $dS = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Užitím vztahu (3.45) tak ihned dostáváme



$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}}, \quad (3.56)$$

což je konstanta úměrná momentu hybnosti planety.

⁶Uzavřenost trajektorií je důsledkem newtonovského tvaru potenciálu. Pro jiné potenciály $V(r)$ nemá příslušné řešení Binetovy rovnice periodický charakter a dochází k posuvu perihelia. Podle tzv. *Bertrandova teoremu* pouze potenciály $V \sim 1/r$ a $V \sim r^2$ vedou na uzavřené periodické trajektorie.

Konečně *třetí Keplerův zákon* získáme přímou integrací druhého. Ze vztahu (3.56) tak plyne $S = \int dS = \int \frac{l}{2m} dt = \frac{l}{2m} T$, kde T je doba oběhu planety. Protože plocha elipsy je určena vzorcem $S = \pi ab$ a díky známému vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ můžeme vyjádřit $b = a\sqrt{1 - e^2}$, platí $T^2 = 4\pi^2 \frac{m^2}{l^2} a^4 (1 - e^2) = 4\pi^2 \frac{m^2}{l^2} p a^3 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$, neboli

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}. \quad (3.57)$$

Podíl druhé mocniny oběžné doby planety a třetí mocniny hlavní polosu její eliptické dráhy je tedy (až na univerzální konstanty) dán pouze hmotností Slunce. Ze vztahu (3.57) lze tedy snadno stanovit hmotnost objektu budícího centrální gravitační pole: chceme-li například zjistit hmotnost Slunce, stačí do tohoto vztahu dosadit příslušné hodnoty T a a pro libovolnou planetu, chceme-li zjistit hmotnost Země, použijeme odpovídající hodnoty T a a Měsíce, chceme-li zjistit hmotnost planety, stačí dosadit oběžnou dobu a hlavní poloosu kterékoli její oběžnice (pochopitelně jen v případě, že lze zanedbat působení ostatních těles).

☒

3.4.2 Historická vsuvka z rudolfínské Prahy

Keplerovy zákony bez nadsázky stojí u kolébky fyziky a moderní přírodovědy, neboť právě z nich Newton vyvodil a v roce 1687 v *Principiích* v ucelené podobě prezentoval svůj gravitační zákon. Můžeme považovat za čest, že první dva z těchto zákonů zformuloval císařský matematik **Johannes Kepler** během svého dvanáctiletého pobytu na dvoře císaře Rudolfa II. v Praze.



JOHANNES KEPLER
(1571–1630)

Osmadvacetiletý Kepler přichází do Prahy v lednu roku 1600 a stává se asistentem věhlasného císařského astronoma Tychona Brahe. Tím začala, jak praví Zdeněk

Horský ve své výtečné monografii *Kepler v Praze* [11], „osobní spolupráce nejlepšího pozorovatele dané epochy s jejím nejlepším teoretikem“ (byť nebyla zcela bez problémů a trvala jen krátce do Brahovy smrti 24. 10. 1601). Kepler pak postupně utřídil a vyhodnotil Brahova pečlivá pozorování pohybu planet, zejména Marsu. Na základě těchto systematických dat dosud nebývalé přesnosti odvodil po četných peripetiích své tři geometrické zákony pohybu nebeských objektů. První a druhý Keplerův zákon byl publikován v rozsáhlém díle *Astronomia nova* (Nová astronomie) z roku 1609, třetí Keplerův zákon pak v roce 1619 v Linci v díle *Harmonice mundi* (Harmonie světa).

Především první Keplerův zákon přinesl podstatné vylepšení Koperníkova heliocentrického systému.⁷ Zaslouhou Mikuláše Koperníka začal „vesmírný stroj“ pracovat v rozumném uspořádání, ale ještě ne dokonale. Stále bylo nutné skládat kruhové pohyby mnoha epicyklů po deferentu (byť už bez ekvantu), aby bylo dosaženo stejné přesnosti předpovědí, jaké dosahovala dosavadní Ptolemaiova geocentrická soustava. Kepler nahradil tento složitý systém kruhových pohybů jedinou elipsou. Inspirací mu přitom byly nejspíš jeho práce z optiky: Kepler teoreticky studoval odrazy světla na kuželosečkách a jako první zavedl pojem ohniska. Není však vyloučen ani nepřímý vliv z oboru architektury, konkrétně eliptický půdorys tzv. Vlašské kaple (dnes součást komplexu Klementina), nejstarší raně barokní stavby v Čechách budované v letech 1590–1597 italskými staviteli.

3.4.3 Metoda efektivního potenciálu

Vraťme se nyní ke vztahu (3.46), který popisuje trajektorie v obecném centrálním poli. Zavedeme užitečnou a jednoduchou metodu, pomocí níž lze provést správný *kvalitativní* rozbor možných pohybů, aniž bychom museli příslušnou diferenciální rovnici explicitně vyřešit.

Definujeme pomocnou veličinu zvanou **efektivní potenciál** vztahem

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (3.58)$$

Vlastně jsme jen k potenciálu centrální síly $V(r)$ přičetli „odstředivý člen“, který souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti l , viz substituce (3.45). Potom můžeme rovnici (3.46) přepsat

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V_{\text{ef}}(r)], \quad (3.59)$$

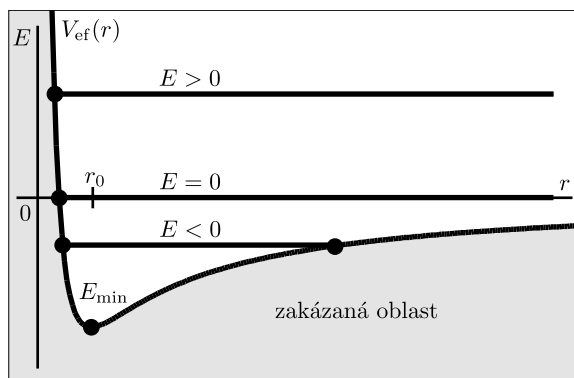
kde konstanta E vyjadřuje zachovávající se celkovou mechanickou energii, zatímco $\dot{r}$ je rychlost planety v *radiálním* směru. Podstata metody spočívá v následujícím triviálním tvrzení:

$$\boxed{\text{Pohyb je možný jen pro taková } r, \text{ kde } V_{\text{ef}}(r) \leq E.}$$

Jinak by pravá strana (3.59) byla záporná, takže by nemohla být druhou mocninou reálné veličiny.

⁷Koperníkovo fundamentální dílo *De revolutionibus orbium coelestium* (O obězích nebeských sfér) vyšlo r. 1543.

Uvedenou podmínku lze velmi dobře analyzovat graficky, jestliže vykreslíme graf efektivního potenciálu (pro daný moment hybnosti l). Například pro newtonovské gravitační pole (3.51) má efektivní potenciál tvar znázorněný na tomto obrázku (pro velké hodnoty r převládá Newtonův potenciál $\sim -\frac{1}{r}$, zatímco pro malé hodnoty r dominuje odstředivý člen $\sim +\frac{1}{r^2}$):



Pod grafem funkce $V_{\text{ef}}(r)$ se nachází *zakázaná oblast*, kam se planeta nikdy nemůže dostat, protože by byla porušena výše uvedená podmínka. Pro danou hodnotu energie E , kterou má těleso *stejnou pro každé r* (protože se zachovává), existují **body obratu určené průsečíkem** vodorovné přímky $E = \text{konst.}$ s grafem efektivního potenciálu. V bodech obratu je $E = V_{\text{ef}}(r)$, takže $\dot{r} = 0$, což znamená, že *radiální* rychlost je právě nulová: planeta (v daný okamžik) zastaví své přibližování ke Slunci anebo své vzdalování od něj (ocitne se v periheliu resp. afeliu). Počet bodů obratu, a tím i kvalitativní charakter pohybu, pochopitelně závisí na hodnotě E . Z obrázku vidíme, že pro $E > 0$ existuje jen jeden bod obratu (perihelium) a že pohyb je neomezený – těleso může odletět do nekonečna, což je v souladu se vztahem (3.54), který v takovém případě vede na hyperbolický pohyb. Mezní (parabolický) případ nastává pro $E = 0$. Pokud $E < 0$, existují dva body obratu (perihelium i afelium), což odpovídá omezenému eliptickému pohybu planet. Vidíme také, že existuje unikátní kruhový pohyb na hodnotě poloměru $r_0 = p$, jenž je právě *minimum* efektivního potenciálu V_{ef} . Protože se jedná o minimum, je kruhová dráha zjevně *stabilní* orbitou.

Zde popsaná metoda efektivního potenciálu je velmi názorná a užitečná pro kvalitativní analýzu možných pohybů v obecných potenciálech $V(r)$, včetně rozboru stability drah. (Například kruhový pohyb v místě maxima příslušného efektivního potenciálu je nestabilní. To nastává např. pro pohyb objektu v blízkém okolí černé díry v kontextu Einsteinovy obecné teorie relativity.)

3.4.4 Rozptyl nabitých částic

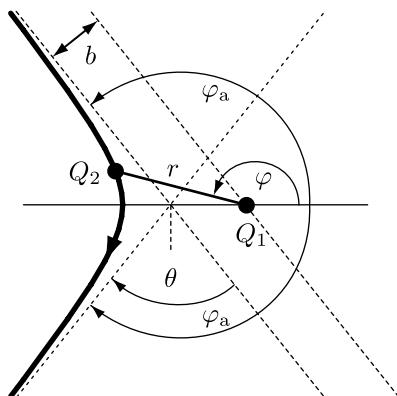
Jiným významným případem pohybu v centrálním poli je rozptyl částic v elektrostatickém coulombickém poli. Tento problém sehrál klíčovou roli počátkem 20. století, kdy se fyzika vydala na cestu do mikrosvěta a začala zkoumat strukturu atomů.

Uvažujme dvě kladně nabité bodové částice, které se elektrostaticky odpuzují. Coulombický potenciál

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{je záporná konstanta,} \quad (3.60)$$

má stejný tvar jako newtonovský gravitační potenciál (3.51) až na to, že konstanta α má nyní opačné znaménko. Předpokládejme, že částice s nábojem Q_1 je pevná (je to těžké „jádro atomu“), zatímco na ni nalétávající částice s nábojem Q_2 je mnohem lehčí (jde např. o „ α -částici“). Její trajektorii v centrálním poli již známe, neboť musí mít stejný tvar jako (3.52).⁸ Protože $E > 0$, podle (3.54) je $\epsilon > 1$, jde tedy o *hyperbolu*.

Zajímá nás především *směr* vstupní a výstupní *asymptoty*, jež jsou dány podmínkou $r \rightarrow \infty$, což podle (3.52) odpovídá hodnotám úhlu $\cos \varphi_a = -\frac{1}{\epsilon}$. Celková odchylka θ částice (úhel mezi vstupní a výstupní asymptotou) je dána podmínkou $\varphi_a = 90^\circ + \theta/2$, viz úhly v dolní části obrázku:



Jednoduchými úpravami a pak užitím vztahu (3.54) odtud plyne

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan(\varphi_a - 90^\circ) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = \frac{\frac{1}{\epsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}.$$

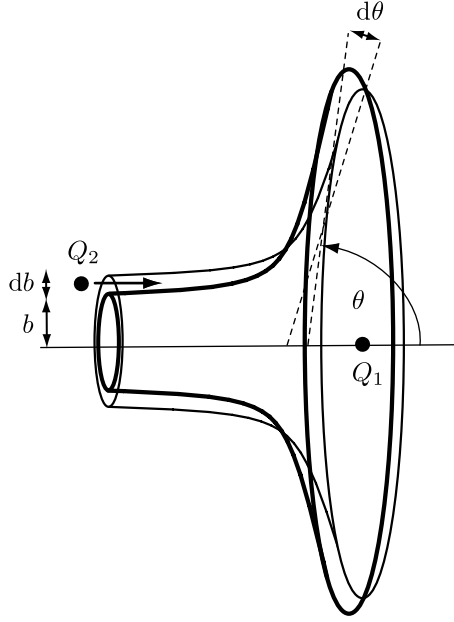
Když nyní dosadíme za α z (3.60) a vyjádříme zachovávané se veličiny E a l pomocí jejich asymptotických hodnot $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ a $l = bmv_\infty$, kde b je *impaktní parametr*, dostaneme nakonec

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \frac{1}{b}}. \quad (3.61)$$

Tento vzorec udává velikost odchylky θ směru letu částice, jestliže nalétává na centrum „v kolmé vzdálenosti“ b . V limitním případě $b = \infty$ částice není centrálním polem vůbec ovlivněna, a tak je $\theta = 0$. Pokud naopak nalétává na centrum přímo (tedy radiálně), je $b = 0$ a vychází $\theta = 180^\circ$, což odpovídá jejímu odrazu zpět.

⁸Zde $\alpha < 0$, takže dle (3.53) je $p < 0$. Musí proto být $1 + \epsilon \cos \varphi < 0$, neboli $\cos \varphi < -\frac{1}{\epsilon}$.

V typickém rozptylovém experimentu existuje proud mnoha nabitých částic, které při průletu terčíkem (např. tenkou kovovou fólií) individuálně interagují s příslušnými centry. Mají při tom různé impaktní parametry b , a tudíž i odpovídající úhly rozptylu θ dané vzorcem (3.61). Má-li částice impaktní parametr z intervalu $(b, b + db)$, rozptýlí se pod úhlem ležícím v intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$, jak je naznačeno na tomto obrázku:



Obvykle definujeme **účinný průřez rozptylu** $d\sigma$ do intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$ vztahem

$$n d\sigma = \frac{dN}{N},$$

kde N je celkový počet *nastřelených* částic, dN je počet částic, které se *odchýlí do intervalu* $(\theta, \theta + d\theta)$, a n je počet rozptylových center na 1 m^2 . Veličina $d\sigma$ má podle obrázku evidentně rozměr *plochy*: je to „efektivní“ plocha mezikruží $d\sigma = dS = 2\pi b db$, kterou musí částice zasáhnout, aby se odchýlila do daného elementárního meziprostoru $(\theta, \theta + d\theta)$. Dosazením z invertované funkce (3.61), tedy $b(\theta) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2}$, dostáváme⁹

$$d\sigma = \pi \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (3.62)$$

Vyjádřeno pomocí prostorového úhlu $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ tedy platí

$$d\sigma = \left(\frac{Q_1 Q_2}{8\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (3.63)$$

⁹po vypuštění znaménka „–“, což souvisí s tím, že $b(\theta)$ je *klesající* funkce

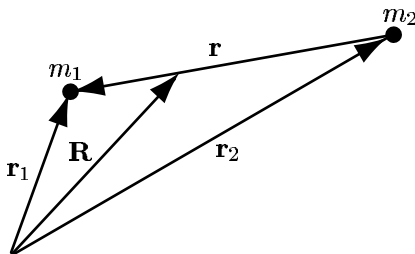
což je slavný **Rutherfordův vztah** pro pružný rozptyl v coulombickém poli. Nejprve ho odvodil teoreticky a pak ho v roce 1911 se svými spolupracovníky experimentálně ověřil rozptylem α -částice na atomech zlata. Experiment jasně prokázal, že dochází ke coulombickému rozptylu na *bodovém* kladně nabitém centru (nikoli například na rozptýleném nábojovém oblaku), čímž byl učiněn *objev atomového jádra* o velikosti řádově 10^{-15} m.

3.5 Problém dvou těles

Uvažujme nyní dva spolu gravitačně interagující objekty (například dvojhvězdný systém) o hmotnostech m_1 a m_2 . Oproti Keplerově úloze tedy již nepředpokládáme, že centrum je pevné. Máme proto celkem 6 stupňů volnosti. Ukážeme ale, že po vhodném rozseparování na 3+3 stupně volnosti lze tuto úlohu převést na problém pohybu v poli centrální síly, který jsme již vyřešili v části 3.4.

Trik spočívá v přechodu ke vhodným zobecněným souřadnicím: namísto polohových vektorů $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ obou objektů zavedeme *polohu hmotného středu* $\mathbf{R}$ a *relativní polohu* $\mathbf{r}$, a to vztahy

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (3.64)$$



tedy inverzně

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (3.65)$$

Lagrangeova funkce pak má tvar

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Tři souřadnice (složky vektoru) $\mathbf{R}$ jsou cyklické, takže $(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{konst.}$ Platí tedy zákon zachování celkové hybnosti soustavy. Pohyb hmotného středu (těžiště) je proto rovnoměrný přímočarý (bez zrychlení) a bez újmy na obecnosti ***lze přejít do těžišťové soustavy***, kde $\mathbf{R} = 0$, neboli dle (3.65) platí vztahy $\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$. V této soustavě pak má Lagrangeova funkce (3.66) tvar

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r}, \quad (3.67)$$

kde jsme zavedli veličinu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.68)$$

zvanou **redukována hmotnost**. Porovnáme-li nyní tvar Lagrangeovy funkce (3.67) s (3.34), vidíme, že problém dvou těles byl efektivně převeden na předchozí problém pohybu jediné (fiktivní) částice hmotnosti μ v centrálním gravitačním poli pevného centra. Z předchozích výpočtů víme, že výsledný pohyb musí být nutně rovinný. Je tedy výhodné zavést polární souřadnice, ve kterých

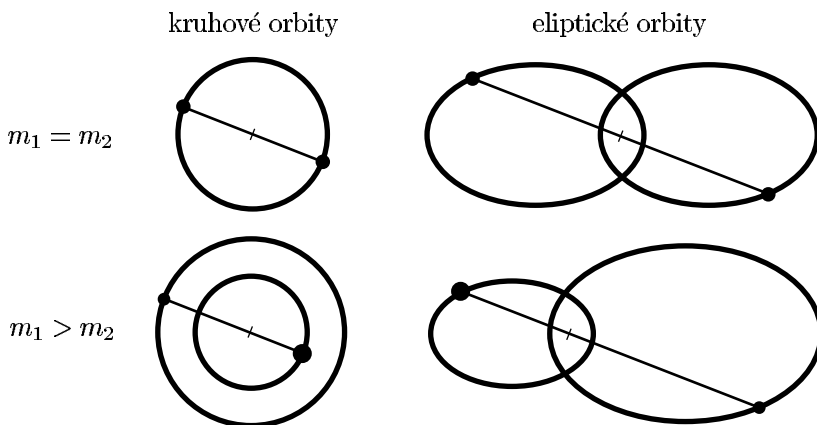
$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r}, \quad (3.69)$$

kde jsme využili ekvivalence Gm_1m_2 a $G(m_1 + m_2)\mu$. Pro případ $m_2 \ll m_1$ je zjevně $\mu \approx m_2$ a $\mathbf{r}_1 \approx 0$, $\mathbf{r}_2 \approx -\mathbf{r}$, limitně tedy dostáváme Keplerovu úlohu již vyřešenou v části 3.4. V obecném případě srovnatelných hmotností obou hvězd postupujeme při řešení naprosto stejně jako v části 3.4.1, provedeme pouze formální substituci $M \rightarrow (m_1 + m_2)$ a $m \rightarrow \mu$. Například 3. Keplerův zákon (3.57) bude mít pro dvojhvězdy tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.70)$$

Tento výraz se v astronomii používá k určování hmotností dvojhvězd.

Víme, že orbity vázaného systému mohou být jen kruhové anebo eliptické. V prvním případě jsou obě hvězdy stále stejně daleko od sebe, ve druhém se navzájem přibližují a zase vzdalují dle „eliptického pravidla“. Výslednou dráhu obou těles ovšem musíme vykreslit tak, aby jejich těžiště zůstávalo stále na stejném místě. Pokud mají obě hvězdy naprosto stejnou hmotnost, budou obíhat po stejně velkých kružnicích resp. elipsách. Pokud je však $m_1 > m_2$, bude první hvězda obíhat po menší dráze než druhá hvězda, jak je naznačeno na následujícím obrázku:



Přechod do těžiškové soustavy dvou těles se používá i pro systémy, jež nemají vázané orbity, například pro rozptyl nabitých částic. To vede na zobecnění Rutherfordova vztahu (3.63), kde m je nahrazeno redukovanou hmotností μ .

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázkou z knihy Teoretická mechanika ve třech knihách.
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.