

Peter Zamarovský

Mýtus nekonečno



KAROLINUM

Mýtus nekonečno

Peter Zamarovský

Recenzovali:

RNDr. Kateřina Trlifajová, Ph.D.

doc. Ing. Karel Malinský, CSc.

Vydala Univerzita Karlova

Nakladatelství Karolinum

Praha 2024

Redakce Václav Hozman

Grafická úprava Zdeněk Ziegler

Sazba DTP Nakladatelství Karolinum

Druhé, nezměněné vydání

© Univerzita Karlova, 2024

Text © Peter Zamarovský, 2024

Preface © Jiří Grygar, 2024

Cover photo © Ondřej Telecký, 2024

Na obálce použita reprodukce obrazu Věry Novákové *Před branami*

ISBN 978-80-246-5857-5

ISBN 978-80-246-5897-1 (pdf)



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

*Věnováno památce profesora Petra Vopěnky,
matematika a vizionáře*

Obsah

Poděkování /9

Předmluva Jiřího Grygara /11

ÚVODEM /15

O čem a pro koho je tato kniha /16

1 NEKONEČNO – BRÁNA K FILOSOFII MATEMATIKY /18

1.1 Zajatci filosofie včerejška /18

1.2 Co značí pojem „nekonečno“? /21

1.3 Pojem „existence“ /22

1.4 Existence čísel /41

2 PRANEKONEČNO /48

2.1 Nekonečno před Řeky /48

2.2 Řekové a APEIRON /51

2.3 Nekonečno a Aristotelés /71

2.4 Archimédés, velmi veliká čísla a nekonečno /79

3 NEKONEČNO STŘEDOVĚKÉ A RENESANČNÍ /82

3.1 Sv. Augustin a aktuální nekonečno /82

3.2 Nekonečno a Tomáš Akvinský /87

3.3 Znovuotevření nekonečného prostoru /94

4 RÁJ NEKONEČNÝCH MNOŽIN /114

4.1 Prehistorie /114

4.2 Hrubá síla nekonečna /122

4.3 Bernard Bolzano, praotec teorie množin /132

4.4 Cantorův matematický ráj /138

4.5 Důsledky Cantorovy teorie /176

5 VYHÁNĚNÍ Z RÁJE /187

5.1 Bourání babylónské věže /188

5.2 Alternativní nekonečno Petra Vopěnky /201

6 DRUHÁ FRONTA: ZÁPAS O NEKONEČNĚ MALÉ /233

6.1 Zrod infinitezimálů a infinitezimálního počtu /234

6.2 Smrt infinitezimálů /242

6.3 Zmrtvýchvstání infinitezimálů /245

7 NEKONEČNO, FYZIKA A REÁLNÝ SVĚT /249

7.1 Nekonečno co do přesnosti /251

7.2 Nekonečně malé a fyzika /253

7.3 Nekonečně veliké a fyzika /254

7.4 Relativita nekonečna? /263

7.5 Princip skromnosti a princip výlučnosti /282

7.6 Nekonečno paralelních vesmírů – sci-fi nebo věda? /283

8 MÝTUS NEKONEČNO /288

8.1 Spatřovat neviditelné za viditelným /288

8.2 Mlčení nekonečna /293

9 NA KONCI CESTY /296

9.1 K čemu jsme v knize dospěli /296

9.2 Epilog /299

Literatura /300

Summary /311

Краткое резюме /314

Rejstřík (méně obvyklých) pojmů /317

Jmenný rejstřík /320

Poděkování

Za přečtení, poznámky a podněty k textu děkuji těmto kolegům: doc. Eduardu Fuchsovi, prof. Jiřímu Podolskému, prof. Petru Kulhánkovi, RNDr. Jiřímu Grygarovi, doc. Karlu Malinskému, RNDr. Kateřině Trlifajové, PhDr. Marku Matějkovi. Za dílčí rady a podněty jsem zavázán také prof. Aleně Vencovské, prof. Lence Karfíkové, doc. Miroslavu Holečkovi, Mgr. Šárce Voráčové, Mgr. Lence Vinklerové, Ing. Miroslavu Horkému, PhDr. Jiřímu Holbovi, doc. Světlavu Kostičovi, doc. Radku Chlupovi, Bc. Jesice Schaft, PhDr. Radimu Kočandrlemu, doc. Karlovi Flossovi, doc. Haně Vymazalové, doc. Janu Slavíkovi, PhDr. Věře Klontzové-Jaklové, doc. Ivanu Štampachovi, prof. Jaroslavu Šestákovi, doc. Čenku Zlatníkovi, RNDr. Janu Kadrnoškovi, Mgr. Michaela Škodové a ing. Lucii Augustovičové. Za morální oporu jsem zavázán ing. Evě Cieslarové. Docentce Adě Kolmanové-Janouchové děkuji za upozornění na práci Arnošta Kolmana o nekonečnu. Nakonec děkuji malířce Věře Novákové za poskytnutí obrazu *Před branami*. Ukazuje na cestu matematiky dvacátého století, na cestu k branám, za kterými se rozprostírají stále nekonečnější nekonečna.

Předmluva Jiřího Grygara

Autora knihy jsem poznal díky sekci pro vědu a filosofii Evropského kulturního klubu zhruba před dvěma desetiletími. Od roku 2008 převzal vedení sekce od prof. Miroslava Kutílka. Všichni tři společně jsme sdíleli zájem o širší souvislosti vědy a kultury, do níž ovšem věda sama nepochybně patří.

Před deseti lety se mi dr. Peter Zamarovský při jednom setkání zmínil, že začíná psát knížku o zdánlivě lehké otázce: Proč je v noci tma? To mne nadchlo, protože z vlastní popularizační zkušenosti vím, jak je tato otázka těžká a záludná. Autor mi pak dával k náhledu první, druhou i třetí verzi rukopisu, než byl sám s textem dostatečně spokojen. Kniha s tímto názvem pak vyšla s mou předmluvou v roce 2011. O dva roky později pak vyšla v angličtině.

Na jaře 2015 mi Peter poslal první verzi své další knihy, tentokrát pojednávající o záhadě nekonečna. Opět mi postupně posílal další dosti podstatné změny a úpravy původního rukopisu. Tak jsem se stal svědkem toho, jak je Peter sám k sobě při každém sepisování náročný. Teprve loni jsem se dočkal konečné varianty textu a po několika odkladech kvůli přemíře vlastních závazků jsem se konečně odhodlal do náročného tématu knihy ponořit.

Nevycházel jsem z úžasu nad tím, s jakým nadhledem i smyslem pro propojení různých úhlů pohledu na tuto vpravdě metafyzickou záhadu autor toto obtížné téma pojal. Nabízí totiž čtenářům osm rozličných perspektiv. Líčí, jak se nekonečnem zabývali největší myslitelé starověku, velcí křesťanští teologové od sv. Augustina až k sv. Tomáši Akvinskému, ale i heretik Giordano Bruno. V roce 1655 zavedl anglický matematik John Wallis pro nekonečno v matematice proslulou ležatou osmičku jako důkaz legitimnosti a vážnosti problému nekonečna pro do té doby

logicky bezespornou matematiku. Mimochodem, je docela příznačné, že většina matematiků se od středověku do současnosti odvolává na Boha jako autoritu, která lidstvu matematiku a nekonečna darovala.

Když se matematici zmocnili předtím vágního pojmu nekonečna pomocí symbolů, pokusili se je vtělit do systému axiomů, vět a důkazů. Nekonečnem se během svého působení v Praze zabýval i španělský jezuita Rodrigo de Arriaga (1592–1667) a dvě století poté také jeho následovník Bernard Bolzano (1781–1848). Ten pak inspiroval dalšího skvělého matematika Georga Cantora (1845–1918), jenž se pokusil pomocí teorie množin velikosti nekonečen „klasifikovat“ a postavit je na pevný logický základ, jak je v matematice obvyklé. Vytvořil „říši nekonečen“, pověstný „Cantorův ráj“, kde strávilo množství matematiků svá nejplodnější léta. Autor knihy dále brilantně popisuje, jak Cantorova snaha narazila na různé paradoxy a spory, a na úsilí matematiků tyto spory řešit. Situace dospěla až tak daleko, že někteří matematici nekonečno dokonce z Cantorova „matematického ráje“ vyhnali. Peter Zamarovský se v této souvislosti zmiňuje zejména o originálním přínosu českého matematika Petra Vopěnky (1935–2015), jehož památce knihu věnoval.

Přidanou hodnotou knihy je pohled na problém zdánlivě opačný, tj. na veličiny nekonečně malé. Tam se bizarnosti nekonečna projevují snad ještě názorněji, protože „nekonečně malé“ nemusíme hledat kdesi v hlubinách vesmíru, ale spíše například v ohnisku přesně vybroušeného zrcadla, kde nás však omezují podivuhodné zákony kvantové mechaniky. Jak známo, tato čarokrásná část fyziky s neuvěřitelně úspěšnými praktickými aplikacemi zavedla již počátkem 20. století klíčový koncept nedělitelných kvant energie, hmoty, geometrických rozměrů i času. Důsledky kvantové mechaniky jsou ovšem v příkrém rozporu s tak často vzývaným zdravým selským rozumem, a i velmistři kvantové teorie připouštějí, že jí sami pořádně nerozumějí.

Autorovi se podařilo zpřístupnit soudobé myšlenky o nekonečnech velkých i nekonečnech malých dokonce v několika úrovních. Četbu usnadňují četné výtečně vybrané citáty rozličných autorit starověku, středověku i novověku, dále krátké přehledy každé z osmi hlavních kapitol i shrnující závěr příhodně nazvaný „Na konci cesty“.

Kniha může zcela určitě zaujmout jak přírodovědce, matematiky, filosofy a teology, tak širší čtenářskou obec studentů středních a vysokých škol, ale i ostatní čtenáře, kteří se dokáží nadchnout pro skutečné záhady, jež dosud nerozluštil žádný detektiv.

Praha, únor 2018
Jiří Grygar

Úvodem

„Ta osmička se tátovi nepovedla,“ prohlásil jsem, když jsem symbol nekonečna uviděl poprvé. Pak jsem se zaradoval: znám zaručeně největší číslo, číslo, které ostatní děti neznají! S nekonečnem jsem se setkal podruhé, když mi tatínek předváděl svůj foťák, měchovou Super Ikontu. Stupnice zaostřování začínala právě onou ležatou osmičkou. Očividný důkaz, že si nekonečno táta nevymyslel – podezíral jsem ho, byl spisovatel – a navíc důkaz, že je v životě k něčemu dobré. Alespoň při focení. Že by si však onen vetchý aparát troufl na nekonečno? A kde je vůbec to nekonečno? Musí být hodně daleko, věže svatovítské katedrály na obzoru, ba ani Měsíc či hvězdy přeci v nekonečnu neleží. (S tím Vítem na Hradě jsem si byl jistý, už jsem tam s tátou byl.) A čekalo mne další překvapení: když se na ono nekonečno zaostřilo, byl ostrý jak srpek Měsíce, tak i věž katedrály, dokonce i domy naproti ulice. Není to nekonečno podvod? Další krize přišla v šesté třídě. Matematikář nakreslil na tabuli onu ležatou osmičku a strohým hlasem sdělil, že nekonečno číslem není, jen jakýmsi symbolem. Otcova autorita i vize největšího čísla se zachvěly. Avšak, nejsou snad ostatní čísla také jen symboly? Nicméně musel jsem uznat, že pokud by bylo nekonečno číslem, muselo by být číslem dost podivným. Nejen, že se k němu nedá dopočítat, ale nedá se s ním ani úplně normálně počítat.

Nekonečno se týká matematiky, může se však týkat i fyziky, může se týkat i reálného světa? Je v našem vesmíru opravdu něco nekonečně veliké? Je sám vesmír nekonečný? A abych nezapomněl, nekonečný je prý i Bůh. Avšak i pro věřící je Bůh tajemstvím a pro mne je tajemstvím dvojnásobným. Přesto ve svém vyprávění Pánaboha opominout nemohu. Ať je to už s Jeho existencí a nekonečností jakékoli, sehrál, v pochopení nekonečna překvapivě významnou roli.

Vše, co si představujeme, je konečné. Pravíme-li, že je něco nekonečné, chceme tím jen naznačit, že nejsme s to pomyslet si toho konec... že nemáme ponětí o té věci, nýbrž jen o své nedostatečnosti.

Užíváme-li slova Bůh, není to proto, že bychom se snažili si ho představit – neboť Bůh je nepochopitelný a jeho velikost a moc jsou nepředstavitelné – ale proto, abychom se mu klaněli.

Thomas Hobbes, *Leviathan* 1651, III., 11¹

O ČEM A PRO KOHO JE TATO KNIHA

Ve své knize líčím tisíciletý příběh lidského ducha, který se pokouší představit nepředstavitelné, pochopit nepochopitelné, vymezit nevymezitelné, spočítat nespočítatelné. Příběh nekonečna.

Jde o kritický, historicko-filosofický pohled do skrytého zákulisí matematiky a fyziky, o úvahy a podněty k zamyšlení, a potěšilo by mne, kdyby tu a tam i k pobavení. Knihu jsem zamýšlel pro širší spektrum zájemců, od zvědavých laiků a studentů, pro které je ryze odborná literatura nestavitelná, až po matematiky a fyziky, kteří se zajímají o hlubší zázemí svých věd. Doufám, že v ní naleznou něco zajímavého i sami historikové a filosofové vědy. Téma jsem pojednal lehčím esejistickým stylem. Pro lepší srozumitelnost zjednodušuji, co lze. Doufám, že ne i to, co nelze.²

Nekonečno není samo-zřejmé, nejeví se, alespoň se nejeví přímo. Téma nekonečna zabíhá do oblastí, se kterými nemáme přímých zkušeností. Branou k nekonečnu se tak stává až filosofie matematiky a fyziky, vědomá i ta ležící v hloubi našeho nevědomí. V knize se snažím tyto filosofické přístupy vystihnout a rozebírám jejich dopad na chápání nekonečna. Pozornost přitom věnuji i směrům novým a netradičním, o kterých se popularizační literatura nezmiňuje. (Nejen popularizační, často ani ta odborná.) Jsou to ale právě tyto směry, které umožňují uvidět

1) Hobbes 2009. Thomas Hobbes z Malmesbury (1588–1679) byl anglický filosof, současník Galilea a Newtona.

2) Nemyslím totiž, že by matematický text měl být srozumitelný pouze matematikům, fyzikální fyzikům a filosofický jen hrstce filosofů, jak tomu nezřídka bývá. A jak zmínil Stephen Hawking, „každá rovnice snižuje počet čtenářů na polovinu“. Nehodlám tedy laskavého čtenáře matematikou příliš obtěžovat. Matematikům se za to omlouvám.

nekonečno v novém světle, v jiné perspektivě.³ To se týká i koncepcí nedávno zesnulého českého matematika profesora Petra Vopěnky, jemuž je má kniha věnována.⁴ Petra Vopěnky si velmi vážím, i když s ním (stejně jako s ostatními) občas polemizuji. Jak však lépe oslavit myslitele, než debatou o jeho názorech? Myšlenky, o kterých se nediskutuje, jsou mrtvé.

Knihy sestává z osmi kapitol a ze shrnujícího závěru, který tvoří kapitolu devátou. První a osmá kapitola vytvářejí jakýsi obecný filosofický rámec. Osu ostatních pak tvoří historie představ o nekonečnu. Od základního textu jsou odlišeny vsuvky: rozličné zajímavosti, historické odbočky, jakož i náročnější a spekulativnější partie. Vyprávění jsem doplnil řadou citátů, rozličných bonmotů, které zmiňované názory podporují i zpochybňují, aby tak ilustrovaly spleť cest poznání.

Kdybychom nebloudili, nebylo by o čem mluvit.

Tibetské rčení

3) Aktuálnost tématu nekonečna může ilustrovat i probíhající internetová diskuse: <https://www.researchgate.net/project/A-Revolution-in-Modern-Philosophy-of-Mathematics/>

4) Vopěnkova filosofie matematiky se zatím nedočkala důkladnější kritické reflexe. Ústřední momenty Vopěnkova přístupu k matematice jsem se pokusil rozebrat v Zamarovský 2015. V této knize pak zejména v kapitole 5.3.

1 Nekonečno – brána k filosofii matematiky

V první kapitole shrneme základní myšlenky filosofie matematiky a fyziky. K jednotlivým filosofickým hlediskům se pak budeme průběžně vracet. V osmé kapitole filosofické koncepce týkající se nekonečna zrekapitulujeme a doplníme.

Nekonečno je tématem příliš závažným, než abychom ho mohli přenechat jen matematikům.

Milan Mráz⁵

Nekonečno je typickým tématem mezioborovým a přesoborovým. Při jeho studiu budeme překračovat hranice jednotlivých oborů a teorií, hranice jednotlivých filosofických pohledů. Právě pohyb v onom hraničním pásmu, v zemi nikoho, bývá tím nejdobrodružnějším a nejzajímavějším, právě v překračování tradicí vymezených hranic spočívá pokrok myšlení i pokrok lidstva.

1.1 ZAJATCI FILOSOFIE VČEREJŠKA

K čemu nám bude filosofování při úvahách o nekonečnu? A k čemu je vůbec filosofie? Stejně jako většina normálních lidí se ani většina matematiků a fyziků o filosofii příliš nezajímá. Filosofie je jakýsi zbytný intelektuální luxus, člověk se bez ní může klidně obejít...

Opravdu?

Dovolím si s tímto názorem polemizovat: I když se ve svých každodenních úvahách neobracíme k nějakému uvědomovanému a vymezenému filosofickému systému, vždy vycházíme z nějakých

5) Mráz 1999: 232. Milan Mráz (1939–2010) byl český filosof, historik filosofie a překladatel z řečtiny. Dlouholetý ředitel Filosofického ústavu AV ČR.

základních představ. Týkají se toho, jak věci jsou, jak je poznáváme, a také způsobu, jak o nich uvažujeme, mluvíme a jak jednáme. Týkají se tedy nějaké ontologie, která vystihuje způsoby bytí,⁶ a nějaké epistemologie, vystihující způsoby našeho poznávání, týkají se i nějaké praxe. Tyto záležitosti nám obvykle připadají tak samozřejmé, že je vytěsňujeme do nevědomí. Příslušné odpovědi nebereme jako odpovědi v rámci určitého filosofického systému, v rámci nějaké teorie či modelu reality, leč za realitu samotnou, za samo-zřejmost, za holá (od našich pohledů oproštěná) fakta, nanejvýše pak za záležitost zdravého rozumu. Každý z nás máme nějakou vlastní „nefilosofickou filosofii“, filosofii s malým (často hodně malým) „f“. Máme ji zasutou v podvědomí či v temnotě nevědomí.⁷ Má proto předsudečný charakter. Není formulována v exaktních pojmech, je intuitivní a vágní. Tuto „filosofii“ si vytváříme od dětství a slouží nám k tomu, abychom se ve světě orientovali, abychom chápali a zvládali běžné situace. V situacích neběžných nám však nebývá moc platná a může nás svést na scestí. Pokud si svá filosofická východiska neuvědomujeme, nejsme schopni je vědomě reflektovat, uvažovat o nich, pak nejsme schopni je ani rozvíjet a případně měnit. Stáváme se jejich zajatci, zajatci svých předsudků.

*... odmítat přemýšlet o filosofii znamená odsuzovat se k uvěznění ve filosofii
včerejška.*

Mary Midgley⁸

Jak dále uvidíme, mnoho myslitelů přistupovalo (a stále přistupuje) k otázce nekonečna, aniž by si jasně nějaké filosofické

6) Slovo „ontologie“ zavedl Christian Wolf (1679–1754). (Poznámka pro informatiky a jim podobné: V informatice nabyt termín „ontologie“ poněkud posunutého významu.)

7) Psychologové (zvláště psychoanalytici) dávají přednost termínu „nevědomí“ (uncounciousness). Termín „podvědomí“ (subcounciousness) se považuje za vágní, zastaralý a amatérský. Já užívám slovo „podvědomí“, pokud chci dát najevo, že mi nejde o exaktní psychologické vyjádření, tedy pokud se chci vyjádřit neurčitěji. Někdy se podvědomí ztotožňuje s předvědomím (pre-consciousness), mezistupněm mezi vědomím a nevědomím („dočasné nevědomí“).

8) Midgley 1991. Mary Midgley (1919–2018) byla osobitá britská filosofka zabývající se filosofií vědy, morální filosofií, právy zvířat, etologií a filosofickými problémy evoluce.

pozadí uvědomovalo. Výsledky jejich úvah se pak lišily v závislosti na tomto pozadí, na této „skryté filosofii“. Tedy, abychom neuvízli na slepé koleji, kdy se budeme pokoušet řešit otázku nekonečna prostředky matematiky či fyziky, zatímco na místě by bylo podívat se na ni z vyššího hlediska filosofického, musíme si onu v zákulisí stojící filosofii uvědomit a jasně ji formulovat. Z předsudku musíme udělat vědomý předpoklad.

Neexistence Filosofie

Hned zpočátku bych chtěl varovat čtenáře ve filosofii nezběhlého: žádná univerzální, všeobecně přijatelná filosofie neexistuje. Odborná (natož pak neodborná) filosofická veřejnost jednotný filosofický pohled nikdy nesdílela, nesdílí a sdílet nebude. (Pakliže k tomu nebude násilím donucena.) Existují jen rozliční filosofové, rozličné filosofické školy a směry. Jejich učení se liší často v podstatných ohledech. Čas od času se sice objevují snahy vybrat onu nejsprávnější, případně jedinou pravou filosofii, Filosofii s velkým „F“. Ve středověku byla u nás brána⁹ za jedinou pravou filosofie aristotelská a Aristotelés byl Filosofem s velkým „F“. V nedávných dobách to byl zase marxismus. Nadřazenost jednoho filosofického pohledu se dokazovala často jen z „vnitřku“, tj. důkazy kruhem¹⁰ a zvnějšku se opírala o světskou moc. A tato moc se zase opírala o ideologii zdůvodněnou touto Filosofii (nebo jediným pravým Náboženstvím). Se zánikem světské moci pak zaniká i monopol těchto ideologických opor.

Ano, absolutní kritérium nejlepšího filosofického systému neexistuje. Avšak, jak jsem už ukázal, bez filosofického pozadí se neobejdeme. Takže nám nezbyvá, než vzít odpovědnost na vlastní bedra a zvolit si tu nejsympatičtější filosofii a vsadit na ní, uvěřit jí. Neměla by to však být víra slepá, měli bychom stále trochu pochybovat, zkoušet i jiné varianty, stále si udržovat nadhled a zpětnou vazbu, uvědomovat si, že veškeré naše „pravdy“

9) „U nás“ – myslím tím Evropu a z části i Blízký východ.

10) Přísně vzato, jiný důkaz než kruhový ani možný není. Většina ideologických systémů je totiž proti svému vyvracování obrněná, „imunizovaná“. (Už pochyby jsou hříšné.) Z hlediska Popperova kritéria to zakládá jejich nevědeckost: vědecké tvrzení by totiž mělo být v principu vyvratitelné-falzifikovatelné. Nicméně každá „poctivá“ filosofie i každé „poctivé“ náboženství přiznávají, že vědou nejsou.

závisejí na určitých předpokladech, na úhlu pohledu. A měli bychom být tolerantní i k pohledům druhých.

Abych se netvářil, že mne samotného se to netýká, chci hned na počátku říci, že po dlouhých úvahách jsem dospěl k názoru, že je mi nejbližší filosofie pragmatismu, a v dalším se pokusím tuto svou volbu podkládat argumenty. Z pragmatického hlediska pak budu posuzovat role různých filosofických systémů aplikovaných na pojem nekonečna a na matematiku a fyziku vůbec. Je na čtenáři, zda tento můj pohled přijme.

1.2 CO ZNAČÍ POJEM „NEKONEČNO“?

Dříve než se pustíme do hlubšího zkoumání, musíme si alespoň rámcově ujasnit, co pod slovem „nekonečno“ míníme. Mám na mysli jakousi předběžnou analýzu, zpřesňování jazyka, resp. jazykem zachycených pojmů. S definováním nekonečna se pak budeme potýkat v průběhu celé knihy. Ústřední otázkou bude, jak nekonečno je, zda vůbec je, a když tak jaké je. Půjde nám tedy především o ontologii, nauku o bytí, konkrétně o bytí nekonečna.

Mnozí filosofové a teologové mluví o nekonečnu, aniž by jasně definovali, o čem to vlastně mluví, čeho že se ono nekonečno má týkat a jak se ta nekonečnost projevuje a určuje. Přistupují k nekonečnu s bezstarostnou velkorysostí. Berou ho buď jako něco samostatně existujícího (substanci), nebo za metaforu charakterizující něco ohromného, nadlidského až božského, případně Boha samého.¹¹ S nejmenšími skrupulemi pak přistupují k nekonečnu mystikové a básníci. Proč ne? I to patří k jejich řemeslu. Kde však leží hranice mezi doslovným označením a metaforou? Existuje vůbec? Wittgenstein¹² zašel až tak daleko, že prohlašoval, že taková hranice není...¹³

11) Jmenujme například Dána Sorena Kierkegaarda (1813–1855) či Francouze Emmanuela Lévinase (1906–1995). Ze žijících filosofů pojal téma nekonečna francouzský filosof Alain Badiou („badyú“) (nar. 1937), který vyšel opravdu z matematického pojetí, viz kapitola 4.4.

12) Ludwig Wittgenstein (1889–1951), rakouský analytický filosof.

13) O metaforičnosti matematiky viz Kůrka 2009.

Avšak i v rámci exaktního (vědeckého) uvažování bývá pojem nekonečna chápán různě. V první řadě může jít o nekonečné množství něčeho určitého – fyzického, třeba atomů či hvězd ve vesmíru. Může jít však o počet něčeho ideálního (abstraktního), třeba čísel, bodů – takto to chápe matematika. Nekonečno může označovat i míru: např. rozlohu vesmíru, délku času nebo nekonečnou intenzitu nějaké fyzikální veličiny. To se ocitáme už v oblasti fyziky. A jak uvidíme, nekonečno se může týkat i malosti.

1.3 POJEM „EXISTENCE“

Otázka, zda a jak nekonečno (nekonečné množiny, veličiny, nekonečně malá čísla...) existuje, se táhne jako červená nit celou knihou. Tak tedy, co to je ona „existence“? O existenci (bytí) pojednává část filosofie, kterou nazýváme ontologií, někdy též metafyzikou.¹⁴ Jak by se dalo čekat, filosofové se neshodnou skoro na ničem, resp. shodnou se pouze na tom, že se neshodnou. A tak rozličné filosofické školy chápou i pojem „existence“ různě.

Přehled jednotlivých přístupů k pojímání bytí a existence by vydal na monografii a byl by pro náš účel zbytečný. Některé filosofické směry (např. fenomenologie) bytí („výskytové bytí“, „příruční bytí“) a existenci odlišují. Stoikové zase uvažovali o existenci, která se týkala jen předmětů tělesných, a o „subsistenci“, nižší formě bytí, která se týkala jsoucn netělesných, třeba matematických. (Jak uvidíme, na uvedeném dělení opravdu něco bylo. My se však většinou bez tohoto jemnějšího rozlišení obejdeme.) A jak z dalšího bude patrné, k pojetí existence lze přistupovat různě i v rámci filosofie matematiky.

Náš vstup do ideálního matematického světa tak vede cez bránu porozumenia existencii, čiže bytiu ideálnych matematických objektov.

Pavol Zlatoš¹⁵

14) Aristotelés mluví o „první filosofii“. Metafyzika bývá chápána i v širším významu, viz dále.

15) Zlatoš 1995: 16. Prof. Pavol Zlatoš (nar. 1955) je slovenský matematik, žák Petra Vopěnky.

1.3.1 Prvotní pragmatismus

„Prafilosofii“ matematiky (a nejen matematiky) byl jakýsi „intuitivní pragmatismus“, primitivní filosofie, kterou by žádný filosof, ba ani obyčejný člověk za opravdovou filosofii nepovažoval. Matematika se bere za pouhý nástroj, který slouží životní praxi: vyměřování pozemků (geo-metrie v původním smyslu slova, GÉ je země), stavitelství, řemeslům, obchodování a poté třeba i astronomii a navigaci. Až později se matematika přestěhovala do jakéhosi ideálního (abstraktního) světa, kde přebývá do dnešní doby. Propojení s praxí se přitom nikdy zcela nepřerušilo, ona pragmaticky pojímaná „reálná“ matematika stále tvoří hlavní pilíř matematiky. V rámci pragmatismu znamená „existence“ především existenci fyzickou, avšak později přecházela nenápadně i úroveň ideální – ta se týkala v první řadě hodnot, tedy i peněz.¹⁶

1.3.2 Prótagorás a prótagorismus

Už v pátém století před Kristem sofista Prótagorás z Abdér usoudil, že bytí-existenci něčeho nejlépe určíme z toho, jak se k tomu něčemu vztahujeme. Svou rozpravu ALÉTHEIA, neboli *O pravdě* prý započal slovy:

Věcí všech měrou je člověk, jsoucích, že (jak) jsou, a nejsoucích, že (jak) nejsou.

Prótagorás, zlomek B 1¹⁷

Prótagorův výrok by měl být tesán do kamene. Vyjadřuje jakousi „rámcovou definici bytí“, ke které se budeme neustále vracet. Nicméně jako každou filosofickou tezi můžeme i tento výrok vysvětlovat na mnoho způsobů, to je slabinou i půvabem filosofie. Tedy: co tu znamená „člověk“? Jsem to já, ty, lidstvo, skupina nějakých znalců? (Jakých?) A co je tou „měrou“? Vnímání? Usuzování? Jaké usuzování? Vědomé, nebo i nevědomé? Stačí, když se nám něco jeví? (A kde leží hranice mezi jevem a pouhým zdáním?) Nebo je měrou zacházení s věcmi, tj. praxe? A co je tou „věcí“, jejíž měrou má člověk být? Může jí být i matematický

16) Člověk, který přehnaně lpí na penězích, bývá označován za materialistu. Absurdní, vždyť peníze jsou statky ryze nemateriální...

17) Citát z Platónova dialogu *Theaitétos* (Platón 1995).

objekt, nekonečno? Může být tou „věcí“ i Bůh? Nebo nějaké tvrzení?¹⁸ Jak vidíme, Prótagorova antropocentrická „definice existence“ je spíše tématem do diskuse – konečně jako všechny filosofické teze.

„Proč zrovna člověk, a ne třeba prase nebo kůň?“, namítá ústy Sókrata Platón. Za touto ironickou poznámkou stojí názor, že měřítkem by měla být autorita vyšší, na smrtelníku nezávislá. Patrně nějaký bůh.

Jak v dalším uvidíme, ono „božské měřítko“ se na nekonečno později opravdu aplikovalo. Stalo se tak potom, co byl „nějaký bůh“ nahrazen Bohem jediným, Bohem křesťanským, Bohem s velkým „B“.

Takže, i když vezmeme Prótagorovu tezi za svou, nemáme zdaleka jasno, natož vyhráno. V rámci prótagorismu lze uvažovat různě, prótagorismus proto nelze brát za nějaký vyhraněný filosofický směr. Spíše přístup, který lze aplikovat v rámci různých filosofii. Zmiňme třeba sensualismus (základem poznání jsou smyslové vjemy), empirismus (základem je zkušenost), racionalismus (základem je lidský rozum), zejména pak filosofii „zdravého rozumu“ (základem je rozum „zdravý“), pragmatismus (základem je lidská praxe), eklekticismus (základem jsou vhodně vybrané myšlenky různých filosofických směrů), různé subjektivisticky založené filosofie atd.

Zdravý rozum a fenomenální přístup¹⁹

Podle svého názvu se filosofie zdravého rozumu zdá být volbou rozumnou. Označení však často klamou. Tedy, co to ten „zdravý rozum“ je? Pro většinu lidí je to jejich vlastní rozum, který zahrnuje i různé předsudky a stereotypy.

Budeme tedy konkrétnější: „zdravý rozum“ (ať už je to cokoli) většině z nás říká, že existuje v prvé řadě to, co se bezprostředně

18) Pokud by se toto tvrzení týkalo i sebe sama, dostaneme se do bludného kruhu sebeztažného výroku. Mluvíme i o paradoxu (přesněji vnitřním sporu) typu Lháře, viz kapitola 4.4.5.

19) Nechci tu mluvit o „fenomenologii“, protože tento termín už obsadil směr založený Edmundem Husserlem (1859–1938) a Martinem Heideggerem (1889–1976). (Bude stručně zmíněn dále.) Od přístupu „fenomenálního“ se liší tím, že vystoupil už do značných (až příliš značných) metafyzických výšin, daleko nad oblast „zdravého rozumu“.

jeví. Tedy (prvoevidované) jevy, fenomény.²⁰ Řada otázek tím však nekončí: Co to znamená „jevit se“, co je to „jev“? Jak odlišit skutečný jev od zdání a klamu? Jak vzít v úvahu, že to, co se jeví jednomu, se nemusí jevit druhému? Tedy, za nespornou budeme mít především existenci konkrétních, tj. „srostitých“ (jasně ohraničených) fyzických předmětů.²¹ Ty se nám jeví přímo, jsou očividné a většinou i hmatatelné, tedy hmatné, „hmotné“ v původním smyslu tohoto slova. („Hmota“ pochází od „hmatat“.) Podobně se jeví i některé nefyzické entity, např. malé počty – tedy malá (přirozená) čísla. Jeví se nám vizuálně, můžeme je bezprostředně vidět, jsou jevem – fenoménem. Vidí je i inteligentnější zvířata, např. ptáci. Větší čísla-počty se nám jeví už nepřímou, prostřednictvím našeho vědomého uvažování – počítání.²² K tomu ovšem potřebujeme už jisté intelektuální úsilí. Jsou ještě jevem?²³ Kde jsou tedy hranice jevů a „jevovosti“? A co s předměty „nesrostitými“, neviditelnými a nehmatatelnými, co s předměty obecnými? Co s čísly velmi velikými, co s nekonečnem? Jeví se nám?

Ona „relativnost jevovosti“ a vyplývající relativnost existence hraje v matematice zajímavou úlohu. Zmíníme se o ní, když si budeme povídat o tom, jak matematici přistupují k některým zvláštním matematickým objektům. Mám na mysli nejen rozličné kuriózní soubory (množiny), ale i „obyčejné“ geometrické body.

1.3.3 Pýthagoreismus a matematický platónismus

Matematický platónismus je paradoxně starší než sám Platón. Zavedli ho už pýthagorejci, kteří učinili zásadní objev: svět ovládá řád – řecky KOSMOS. (Termín KOSMOS označoval původně

20) Tento přístup dovedla do krajnosti zmíněná filosofie fenomenologická.

21) Není asi náhodou, že „concrete“ značí v angličtině také beton.

22) I to může být předmětem diskuse. Kdo viděl filmové drama *Rain Man*, tak si vzpomene na postavu geniálního autisty, který „viděl“ i velmi veliká čísla, odmocniny, vysoké násobky a podobně. Film byl inspirován skutečným příběhem. Podobné případy byly mnohokrát zdokumentovány, abychom však nepodlehli klamu, naprostá většina autistů takovéto schopnosti postrádá.

23) Petr Vopěnka rozlišuje „prvoevidovaný jev“ od jevu „neprvoevidovaného“, zastřehého. Takovýto „zastřehý jev“ si však podle mého soudu označení „jev“ nezaslouží a jevem ho proto nazývat nebudu. (Viz kapitola 8.1.)

pořádek, disciplínu, šperk.²⁴ KOSMOS byl tedy opakem chaosu, nepořádku, ne-řádu.) A co je důležité, pýthagorejci si uvědomili, že tento řád lze vystihnout lidskými prostředky – matematikou.

Ovládá opravdu tento svět nějaký řád? Je opravdu vše předurčené tímto řádem? A lze tento řád vystihnout prostředky matematiky? Mnohé naznačuje, že by to pravda být mohla. Rigorózně dokázat to však nelze. Vědci si však vzali tuto představu – (absolutní) determinismus – za svou. Alespoň ti „praví exaktní“ vědci – rozuměj fyzikové. A vzali si za úkol tento řád odhalovat, nebo alespoň poodhalovat. Náhoda podle nich neexistuje, není to ontologický pojem, nevyjadřuje, jak věci jsou. Je to jen naše neznalost řádu, tedy pojem epistemologický, vyjadřující naše omezení. Podobně chaos je jen naše neschopnost řád odhalit a pochopit. (Pro všeznalého Boha náhoda ani chaos neexistují.) Tato teze byla plně přijata starověkými atomisty a na vážnosti získala zejména po Newtonových pracích, po vzniku teoretické mechaniky. Teprve začátkem dvacátého století začali fyzikové o absolutním determinismu vážně pochybovat. Připustili existenci „ontologické náhody“. (Tento směr se nazývá „týchismus“.²⁵) Stalo se tak vlivem objevů na poli kvantové fyziky. Mnozí se však determinismu stále drželi, jmenujme v první řadě Alberta Einsteina. A někteří fyzikové obhajují determinismus dodnes.

Pýthagorejci prosazovali i to, že je nejen možné, ale i smysluplné a užitečné uvažovat také o obecných a čistě nefyzických, ideálních matematických objektech: geometrických tvarech a číslech. Nadšení z tohoto objevu je přivedlo až k tomu, že tyto netělesné matematické objekty povýšili na základ všeho jsoucího. Pro pýthagorejce vše sestávalo z geometrických mezí, tvarů a počtů, vše, co se dalo pojmut, mělo nějaký konec, vše se dalo číselně vyjádřit, vše bylo číslem.

Pro pýthagorejce tvořila (přirozená) čísla nekonečný, skutečný, nestvořený svět bytí. Většina matematiků se drží této víry dodnes.

Edward Nelson²⁶

24) Odtud i slovo „kosmetika“.

25) Zavedli jej v 19. století filosofové pragmatismu. Výraz je odvozen od jména řecké bohyně (šťastné) náhody Týché.

26) Nelson 1977. Edward Nelson (1932–2014) byl americký matematik známý svými svéráznými názory na základy matematiky. V kapitole 5.2 se k němu vrátíme.

Slovo „matematika“ pochází od slova MATHÉMA, které znamenalo naučení, poučka. „Matematika“ pak byla původně veškerá nauka, věda. Slovo „matematika“ převzaly skoro všechny evropské národy, jedna z nemnoha výjimek je holandština, která používá výraz „Wiskunde“, tj. „umění jistoty“. ²⁷ Je však matematika opravdu uměním jistoty? ²⁸

Na pythagorejce navázal slavný Platón, který se u nich učil a měl mezi nimi své přátele. (Jmenujme alespoň Archýtu Tarentského, o kterém bude řeč.) Vymyslel jakousi „říši forem“, kterou trochu nešťastně překládáme jako „říše idejí“. (Platónovy formy totiž myšlenkami nebyly.) V rámci platónismu tedy existuje na naší mysli nezávislý „vyšší svět“, který náš intelekt objevuje. Platón to vyjádřil formou poetického mýtu: Poznávání věcí (konkrétních i obecných) spočívá v tom, že se naše duše rozpomíná na odpovídající formy-ideje, které spatřila ve světě idejí, kde pobývala před svým vtělením (inkarnací) do lidské bytosti. Podle této Platónovy „filosofické pohádky“ svět idejí tvoří jakousi nadoblačnou říši, kam zavítají občas i bohové, dokonce i se svými koňskými spřeženími. „Jevení se“ je tedy v rámci platónského mýtu rozpomínáním se (αναμνήσις – ANAMNĚSIS, počestěle anamnéze či anamnéza ²⁹) na ideje-formy spatřené před naším narozením. K tomu nám napomáhají vjemy pocházející z našeho světa. ³⁰ Věci našeho světa jsou přitom jen nedokonalými modely (nebo stíny) dokonalých idejí – ty existují reálně, ostatní už méně reálně. ³¹ (Např. nakreslený trojúhelník je nápodobou „skutečného“, tj. ideálního trojúhelníku, je pomůckou k jeho pochopení.)

27) Je pouhou náhodou, že to byl právě holandský matematik L. E. J. Brouwer, který jako první základy matematiky vážně zpochybnil? (Viz kapitola 5.1.)

28) Na toto téma napsal pěknou knihu Pavol Zlatoš (Zlatoš 1995).

29) Forma „anamnéza“ se užívá v lékařské terminologii, jde o rozpomínání se na „předchorobí“.

30) Platón zavádí různé stupně skutečnosti, stupňovitou ontologii. (Ilustruje to v podobenství o úsečce, dialog *Ústava*). Nejvíce skutečný svět tvoří jeho ideje-formy, pak následuje svět matematický, náš pozemský svět je už méně skutečný.

31) Proto se říká platónismu také realismus, či realismus univerzálií („univerzálie“ čili „obecniny“ je novější označení pro platónské ideje). Avšak termín „realismus“ označuje více dokonce protichůdných směrů. Název (objektivní) idealismus by byl nejvýstižnější, je však zatížen neblahými konotacemi z dob minulých, kdy „idealistický“ znamenalo zpátečnický, reakční, nepřátelský, prostě škodlivý.

Filosofii matematiky, která je založena na představě nezávislé existence matematických jsoucen, říkáme matematický platónismus.³² Měl by to být spíše pythagoreismus, historie však nebývá spravedlivá. Platónismus dodnes tvoří základ téměř veškeré filosofie matematiky, přesněji řečeno matematické ontologie. Epistemologická část – rozpomínání se duše na pobyt v říši idejí – se totiž nebere (a možná nikdy nebrala) moc vážně. Platónismus je základem tak samozřejmým, že se přestěhoval do kolektivního nevědomí matematiků a stal se z něj „matematický předpoklad“. Škodlivý, nebo užitečný?

Platónova epistemologie – anamnéze – vychází z představy našich nevybavitelných, nebo těžko vybavitelných vzpomínek. Situaci Platón ilustroval v dialogu *Menón*, kde si otrok díky vhodným otázkám „rozpomene“ na Pythagorovu větu, kterou se nikdy neučil.³³ (Přesněji řečeno, „rozpomene“ se na způsob, jak nakreslit čtverec o dvojnásobné ploše, než má zadaný čtverec, za touto konstrukcí je skryta Pythagorova věta.) Anamnéze tedy poukazuje na nevědomí, ve smyslu, jak to chápe Jungova analytická psychologie. Ta (na rozdíl od klasické psychoanalýzy Freudovy) uvažuje nevědomí kolektivní. Říše idejí – není to snad předobraz onoho jungovského kolektivního nevědomí?

Není důležité nemít předpoklady, ale mít ty správné předpoklady.

Steven Weinberg³⁴

Skutečné matematické objekty jsou tedy nehmotné, neviditelné a pětící smyslů nevnímátné. Jsou vnímátné jen „smyslem šestým“, vnitřním zrakem, intuicí, představivostí. (Nebo pamětí, kdybychom brali onen inkarnační mýtus vážně.) Přesto matematický platónismus paradoxně předpokládá, že existují reálně.

32) Označení „matematický platónismus“ pochází až z 19. století. Vopěnka v této souvislosti mluví o „novoplatónismu“. Není to však šťastné, jako „novoplatónismus“ se totiž tradičně označuje systém, který založil koncem druhého století Ammonios Sakkás. (Vedle dosti modifikované platónské filosofie zahrnoval i myšlenky dalších směrů včetně rozličných náboženských a mystických motivů.)

33) Obvykle se uvádí, že téma nevědomí se objevuje až u sv. Augustína. Podíval se nad tím, že když něco zapomeneme a pak si na to vzpomeneme, poznáme, že to bylo ono zapomenuté. Jak je to možné, když jsme to přeci zapomněli?

34) Weinberg 1989. Steven Weinberg (nar. 1933), americký fyzik, Nobelova cena 1979.

Předpoklad, že by šlo jen o naše výmysly, by totiž matematiku znevážil. Opravdu? (Viz dále.)

Matematika má blízko k fyzice, konečně oba obory se obvykle studují na téže fakultě. A, jak známo, fyzika má v popisu práce studovat svět skutečný. Takže matematika, aby nezaostávala, se musí zabývat také „skutečností“ a ne nějakými výmysly.

1.3.4 Realismus závislý na modelu

Slovo „model“ má více významů (homonymita). Například pro malíře je modelem dívka stojící v ateliéru a „skutečností“ je pak namalovaný obraz. Pro leteckého modeláře však není modelem skutečné letadlo, modelem je jeho napodobenina, kterou si ze špejlí slepil. Co však znamená „model“ v matematice a fyzice?

V matematice se vychází zpravidla z (neuvědomovaného) matematického platónismu. V rámci matematických teorií (konkrétně teorií množin, bude o nich pojednáno dále) bývá za „model“ označován objekt, na němž jsou definovány nějaké vztahy dané formální teorií tak, že tuto teorii „modeluje“ ve světě matematiky. „Reálnější“ je přitom ona formální teorie, „model“ je aplikací této teorie v (přízemnější) matematické praxi. U fyziků však není platónismus v oblibě, a tak za reálnější berou svět fyzický a jeho modelem je pak nějaká teorie či hypotéza.³⁵ Nicméně někteří teoretici fyzikové jsou přestrojenými matematiky a inklinují k platónskému chápání: teorie = realita, modelem jsou aplikace na konkrétní případy (viz kapitola 4.4).

Fyzikové se zabývají světem vezdejším, a to je nutí držet se víc při zemi. Ti kritičtější si uvědomují, že fyzická realita je jim dostupná pouze přes různé hypotézy, teorie a modely, tj. přes různé „pomůcky k pochopení“. Oněm pomůckám, oněm modelům se pak připisuje jakási „náhradní realita“. Modely poté hrají v procesu poznání roli obdobnou roli, jakou mají v platónismu ideje. Mluvíme proto o realismu závislém na modelu (Model Dependent Realism, MDR). Pokud své modely s realitou ztotožníme (pokud ztotožníme „skutečnou“ a „náhradní“ realitu), stáváme

35) Ve fyzice se dnes modelem rozumí často až numerická simulace nějaké teorie.

se zajatci své neuvědomované filosofie, své iluze, svého modelování. Uniká nám, že modely mohou být i maskami, které určité aspekty reality zakrývají.

Je však poctivé přiznat, že četné vědecké teorie a modely jsou do té míry osvědčené a teoreticky fundované, že je nemožné ignorovat, či dokonce popírat bez nebezpečí, že vás vyhodí od zkoušky, budete považováni za hlupáky či duševně choré, nebo se stanete kandidátem anticeny „bludný balvan“.³⁶ (Což vám na druhé straně může přinést i jistou popularitu.)

To, že jste snící, si neuvědomujete proto, že stále zůstáváte ve snu.

Šrí Nisargadatta Maharadž, podle Rameše Balsekara³⁷

Čtenář znalý historie astronomie si možná vzpomene na Andrease Osiandera (1498–1552), který ve své³⁸ předmluvě ke Kopernikově spisu *O oběžích nebeských sfér* napsal: „Kopernikova hypotéza nemusí být nutně pravdivá (ba není ani pravděpodobná), je to pouhá pomůcka k výpočtům poloh nebeských těles.“³⁹ Svým způsobem měl tento teolog pravdu. Druhou stránkou mince však bylo, že tradiční geocentrismus byl také pouhou „pomůckou k pochopení“, ovšem mnohem horší než systém Kopernikův.

A další příklad z minulosti: Ještě na přelomu devatenáctého a dvacátého století rakouský fyzik a filosof Ernst Mach⁴⁰ zpochybňoval reálnou existenci neočividných, nehmatných a nezjevných atomů. Nejsou to jen pomocné představy chemiků, pouhé pomůcky k pochopení? Mach svým „antiatomismem“ mezi chemiky a fyziky veliký dojem neudělal a věda se vypravila jinou cestou. Nicméně tímto svým „omylem“ poukázal na zásadní otázku: Kde leží hranice mezi skutečností a pomocnou představou, modelem, pomůckou k pochopení?

Odpověď na otázku po existenci nezjevného tedy záleží do jisté míry na vkusu, individuálním i kolektivním. Při definici základních pojmů a vztahů (včetně matematických axiomů,

36) Za matení veřejnosti pavědou udílí český klub skeptiků Sisyfos.

37) Balsekar 2001: 53.

38) Předmluva byla anonymní, takže budila dojem, že pochází od autora.

39) Kopernik 1543.

40) Ernst Mach (1838–1916) byl rakouský fyzik a filosof. Léta působil i v Praze. Mezi hlavní Machovy oponenty patřil zastánce atomismu Ludwig Boltzmann (a také V. I. Lenin, to je ale jiná pohádka). Viz kapitola 7.4.

tj. základních nedokazatelných tvrzení) se pohybujeme v oblasti metafyzické, jinými slovy filosofické. Nic tu není bezpečně dokazatelné a vyvratitelné, jedinou jistotou je naše nejistota. Musíme si nějaký systém zvolit – činíme tak často intuitivně, tedy nevědomě – a teprve na základě tohoto systému odvozujeme a dokazujeme pravdy a vyvracíme bludy. Správnost naší volby pak ukáže až praxe. Avšak ani od praxe nelze vždy čekat odpověď jednoznačnou...

Jak jsme viděli, Platón s Prótagorovou myšlenkou o lidské míře věcí polemizoval. Nicméně i Platónova nauka vychází z představy, že to jsou lidské duše, které ideje za svého pobytu ve vyšších sférách poznávají a potom se na ně rozpomínají. Takže je tu opět člověk – tedy lidská duše. (Fyzické tělo není v rámci platónismu podstatné.) A i když se oně inkarnanční báchorky a anamnéze vzdáme, je to stále náš vnitřní zrak, naše intuice, náš „šestý smysl“, který je měřítkem věcí.

1.3.5 Teoplatónismus a filosofie Kantova

Počátkem pátého století se pokusil sv. Augustin (354–430) skloubit platónismus s křesťanstvím. Platónskou říši idejí umístil do mysli Boží a rozpomínání se duše na říši idejí (platónskou anamnézi) nahradil božím osvícením – iluminací.⁴¹ Vytvořil tím směr, který nazýváme teoplatónismem.⁴² Jak dále uvidíme (kapitola 3.1), teoplatónismus sehrál v pochopení matematického nekonečna zásadní úlohu.

Ve století osmnáctém navázal na Platónovu koncepci Immanuel Kant (1724–1804). Neuvažoval už říši idejí ani mysl Boží. Místo toho zavedl vrozené „apriorní nazírací formy“.⁴³ Zní to moderněji, nicméně původ oněch základů poznání ani tato koncepce neobjasňuje. Mezi nazírací formy počítal i čas a (eukleidovský) prostor. Jak dále uvidíme, na přelomu devatenáctého a dvacátého století pak zbrzdilo toto kantovské (kantovsko-platónské) pojetí

41) Podrobněji viz Karfíková 2015.

42) Vopěnka mluví o platónsko-teologickém přístupu.

43) Ovšem v omezenějším počtu než Platón. Šlo jen o prostor, čas a kauzalitu. A ve století dvacátém zavedl C. G. Jung kolektivní nevědomí, kam bychom mohli ony apriorní formy (ideje) umístit. Jungova psychologie však neměla na filosofii matematiky a fyziky patrný dopad.

vývoj fyziky, jmenovitě přijetí neeukleidovských geometrií. (Proč by měla fyzika studovat čas a prostor, když jsou to pouhé nazírací formy?) A jak se pokusím v dalším ukázat, tento způsob uvažování se později stal i brzdou vývoje matematiky.

1.3.6 Aristotelismus, nominalismus a konceptualismus
Platónismus je sice filosofie krásná a, jak pravil Jan Patočka, „mohutné síly filosofické“ (viz kapitola 5.1), je však založen na filosofické pohádce. K tomu, abychom se přiblížili realitě, je třeba se s romantickým mýtem rozloučit. To činí druhý směr, za jehož zakladatele se považuje Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.). Za existující má pouze to, co je jednotlivé a konkrétní, především materiální – hmotné, tedy co lze hmatat, vidět, slyšet a čichat, to, co se v běžném slova smyslu jeví. Platónské ideje-formy jsou však nezjevné, a Aristotelés je proto považoval jen za společná jména navzájem si podobných jevů. Podobnost však určujeme my sami a jména dáváme také my. Ideje jsou proto našimi výtvary, konstrukty, chcete-li, výmysly. A našimi výtvary jsou z aristotelského hlediska i matematické objekty včetně nekonečna. Například (přirozená) čísla jsme si vytvořili (vynalezli je), abychom zachytili, co mají společného stejně veliké soubory věcí. Objektivně existují pouze tyto věci, nikoli čísla. Našimi konstrukty-výmysly jsou i matematické teorie.

Ve středověku navázal na Aristotelovu epistemologii nominalismus (NOMEN = slovo, jméno). Méně radikální formu pak představuje konceptualismus (CONCEPTUS = pojem, pojetí, ale i početí), podle kterého slovo odkazuje na pojem v naší myslí. Později na tyto přístupy volně navázaly různé formy materialismu, a budeme-li vstřícní, i pozitivismu, novopozitivismu, empirismu, senzualismu, skepticismu, pragmatismu, ve fyzice to byl operacionismus, v matematice pak konstruktivismus a logický pozitivismus.

Je matematika výmyslem?

Aplikace aristotelského přístupu na matematiku se střetává s námitkou (či s podvědomým pocitem), že matematické objekty nebere aristotelismus dost vážně, protože jsou pouhými výmysly, produkty fantazie.

Problém podle mne pramení ve víceznačnost (homonymii) slova „vymýšlet“. ⁴⁴ Vymýšlet lze fantastické věci (mýty, příběhy, romány) nebo přímo nesmysly či lži (vymyšlený = neskutečný). Vymýšlet však můžeme i „jak věci opravdu jsou“, tedy hypotézy, teorie, „pomůcky k pochopení“, vymyšleny jsou i vynálezy. Vzpomeňme na anglické ekvivalenty: „dream up“ (vysnit), „invent“ (vynalézt), „conceive“ (uvažovat), „fabricate“ (uměle vytvořit). Matoucí je, že hranice mezi různými „vymyšlenými“ nemusí být jasná. (A to ani v té angličtině.) Například rovník je pomyslná (jaká jiná?) kružnice na zeměkouli. Je však „vymyšlen“? Z určitého hlediska ano. Avšak není pouhou fantazií natož nesmyslem, ale užitečnou pomůckou. Souhvězdí jsou také vymyšlena (uměle vytvořena – dohodou sjednána), a to ve volnějším slova smyslu, podstatnou roli tu hrála fantazie. Na rozdíl od rovníku bychom je mohli vymyslet zcela jinak. ⁴⁵ Otázka by tedy měla znít: v jakém smyslu slova byly vymyšleny matematické pojmy, a konkrétně jak je „zkonstruováno“ nekonečno?

Nešlo samozřejmě o nevázanou fantazii, matematika byla vymyšlena tak, aby především popisovala a předvíдалa kvantitativní vztahy mezi jevy tohoto světa. V rámci matematického uvažování si lidstvo „vymyslilo“ i počítání a měření. U konečných (zejména malých) souborů a konkrétních objektů s tím nebývá problém. Z praxe víme, že každý normální člověk (pokud se nesplete) napočítá a naměří stejně. (Díky tomu můžeme považovat počty či velikosti za jevy intersubjektivní, stejné pro všechny.) Ona „konstrukce“ počtů a velikostí je tak samozřejmá, že se přestěhovala do našeho nevědomí. Máme ji za samozřejmost, vymýšlet principiálně jiné počítání a měření by bylo pošetilé. (Nicméně třeba v kosmologii ono určování vzdáleností, ono „měření“ už samozřejmě být nemusí, viz kapitola 7.) Avšak určování velikostí nekonečných souborů a veličin je úplně něco jiného. Je zcela nemožné, opřít se o zkušenost a praxi se tu nemůžeme, „počítat“ a „měřit“ nekonečno můžeme pouze v přeneseném, tj. rozšířeném slova smyslu. A toto „přenášení“ a „rozšiřování“ představuje ono „vymyšlení“ a „konstruování“ už v trochu volnějším smyslu slova.

44) Podobně je to s termínem „konstruovat“, viz třeba „zkonstruovaný“ most a na druhé straně „vykonstruované“ obvinění.

45) K mnohému „vymyšlení“ dochází nevědomě na základě různých asociací. Jsou to ještě „výmysly“? Nebo jde spíš o nápady?

„Velikost“ nekonečna pak bude záviset na tom, jak to uděláme. Můžeme to dělat různě, i když ne zcela libovolně. A nemusíme to udělat vůbec. (Podrobněji viz kapitoly 4., 5. a 8.)

Konstruktivismus a operacionismus

Konstruktivismus je možné považovat za určitou aplikaci aristotelského přístupu v matematice. Matematické objekty prohlašuje za naše konstrukty a za přijatelné (reálné) uznává pouze to, co dovedeme zkonstruovat konečným počtem kroků. Tedy nikoli nekonečna, nikoli „nevyčíslitelná reálná čísla“ (k tomuto paradoxnímu pojmu viz kapitoly 4.3, 5.2, 8). Mezi protagonisty konstruktivismu patřili zejména Němec Leopold Kronecker, Američan Hermann Weyl,⁴⁶ Holanďan Luitzen Brouwer, ruští matematici A. A. Markov, A. D. Alexandrov. (O nich bude řeč dále.)

V rámci fyziky se aristotelský přístup odráží ve filosofii operacionismu. Jeho vznik byl inspirován prací Percy W. Bridgmana *Logika moderní fyziky*.⁴⁷ Operacionismus je založen na myšlence, že při definování nějakého fyzikálního pojmu (veličiny) musíme vyjít z metody, jak jej konstruovat, tj., jak příslušnou veličinu změřit. Operacionismus proto odmítá čistě teoretické konstrukty, „metafyzické“ a nezjevné pojmy (tzv. interfenomény – viz kapitola 8.1) a omezuje se jen na pozorovatelné a zjevné, tedy na jevy-fenomény.

Ontologie = epistemologie?

Sám výše zmíněným „prótagorovským“ směrem fandím. I kdybychom totiž uznali za měřítko umístění v nějaké říši matematických idejí nebo v mysli Boží, ve skutečnosti jsou to jen naše lidské představy, naše projekce. (Jak bychom mohli nahlížet do Boží mysli?) Ať chceme nebo ne, naše ontologie (nauka o tom, jak věci jsou) závisí na našem přístupu k těmto věcem, na tom, jak tyto

46) Hermann Weyl (1885–1955), americký matematik německého původu. Zabýval se i fyzikou, obecnou teorií relativity a kvantovou mechanikou.

47) Bridgman 1927. Percy Williams Bridgman (1882–1961) byl americký experimentální(!) fyzik a filosof. Zabýval se především studiem chování materiálů při vysokých teplotách a tlacích. V roce 1946 získal Nobelovu cenu.

věci poznáváme, jak si pojmy vytváříme.⁴⁸ Věci jsou prostě tak, jak o nich my sami usuzujeme. Měřítkem je člověk, ať už matematik, fyzik, filosof či kdokoli z nás.

Na to, co a jak objektivně existuje, totiž můžeme usuzovat výhradně z našeho poznání, z epistemologie. Principiálně nepoznatelné (nepozorovatelné ani z pozorování neodvoditelné) nemá smysl brát vážně. Tudíž neexistuje! Odvážíme-li se přijmout tento závěr, pak ontologie zcela závisí na epistemologii nebo ještě pregnantněji ontologie se na epistemologii redukuje. Přístup dovedl do krajnosti Gregory Bateson, který mezi tyto pojmy položil rovnítko „ontologie = epistemologie“.⁴⁹ V podobném smyslu mluvil Willard Quine⁵⁰ o „ontologické relativitě“. (Viz kapitola 5.1.)⁵¹

Batesonův závěr (ontologie = epistemologie) nelze samozřejmě odvodit z logiky, jde o krok heuristický (objevitelský), epistemologický.⁵² Jeho principem je, že ztotožníme něco s něčím původně jiným. Tímto krokem se náš pohled zjednodušuje a projasňuje.⁵³ Samozřejmě je tu riziko, že půjde o zjednodušení přílišné – „oversimplification“, jak by řekli Angličané.

Vše se má udělat co nejjednodušeji, jak to jen jde. Ne však více.

Albert Einstein⁵⁴

48) Pozorný čtenář si všimne jemné dvojznačnosti (homonymity) termínů: Ontologie a epistemologie jsou jednak nauky o tom, jak věci jsou, resp. jak je poznáváme. Na druhé straně se tyto výrazy používají i k označení toho, jak věci jsou a jak je poznáváme. Podobná víceznačnost se týká mnoha termínů: chemie, fyzika, matematika....

49) Bateson 2006. Bateson (1904–1980) byl anglo-americký biolog, antropolog a ekolog.

50) Quine Willard van Orman (1908–2000) byl americký filosof, matematik a logik.

51) Ve prospěch tohoto přístupu mluví i kvantová fyzika. Její nejrozšířenější, tzv. kodaňská interpretace, předpokládá, že pozorovaný systém je vytvářen teprve procesem pozorování. K existenci systému je třeba pozorovatele stojícího vně tohoto systému. Jestli to čtenáři případně divné, ujišťuji, že není sám.

52) Kráčí se dopředu, zmíněný „krok“ však míří stranou, ven z logiky. Nebylo by výstižnější mluvit o „cimrmanovském úkroku stranou“?

53) Fyzikové si možná v této souvislosti vzpomenou na kolosální význam Einsteina ztotožnění gravitační a setrvačné hmotnosti, které umožnilo chápat gravitaci jako zakřivení prostoročasu.

54) <http://quoteinvestigator.com/2011/05/13/einstein-simple/>

1.3.7 Pragmatismus

Na aristotelismus volně navazuje i pragmatismus. Pro tuto filosofii je konečným kritériem pravdivosti praxe.⁵⁵ Co se osvědčuje, je správné, a tedy i pravdivé. Opět tu máme logický „úrok stranou“, opět tu ztotožňujeme původně různé vlastnosti (osvědčenost a pravdivost). Problém tohoto epistemologického kroku je samozřejmě v tom, že osvědčenost je kritérium nejednoznačné, osvědčovat se mohou koncepty různé, dokonce i protikladné. Z tohoto důvodu neberou mnozí pragmatismus za „skutečnou filosofii“. Přesto pragmatická hlediska zastává nejen většina neškolených, obyčejných lidí, ale, jak dále uvidíme, i mnoho matematiků. Pragmatismus zastává, i když se k němu nahlas nehlásí.

Neuvažujeme-li prvotní „prafilosofický“ pragmatismus, který tu byl od nepaměti, tak můžeme říct, že pragmaticky orientované filosofie se objevují už ve starověku. Mezi první patřili sofisté, ke kterým se řadí i zmíněný Prótagorás (měrou je člověk – ve smyslu lidské praxe).⁵⁶ Filosofie, která se za pragmatismus sama označuje a za své jméno se nestydí, vzniká koncem devatenáctého století v USA. Výraz „pragmatismus“ prý poprvé použil v roce 1898 William James, který však za autora tohoto směru označil matematika Charlese Sanderse Peirce.⁵⁷

1.3.8 Eklekticismus

Za poněkud méněcennou filosofii bývá považován i eklekticismus (řecky EK-LEKTOS = vybraný). Znamená vybírání myšlenek z různých filosofických směrů, namíchání „myšlenkového mixu“. Slovo eklekticismus má poněkud pejorativní význam (nedostatek originálních myšlenek), a tak se ani k tomuto směru mnoho

55) Na kritérium praxe se odvolává i marxismus. Pod onou „praxí“ však rozumí „revoluční praxi“, tj. celospolečenskou revoluční aktivitu, která vede ke změně společenského systému.

56) Redukovat filosofii sofistů pouze na pragmatismus by však bylo příliš zjednodušené.

57) Charles Sanders Peirce (1839–1914) byl americký matematik a logik. Založil moderní sémiotiku – nauku o znakových systémech. Tím, že objevil souvislost mezi logikou a funkcí elektronických obvodů, se zasloužil o vznik informatiky. Zavedl operátor NOR, značka $\downarrow$, tj. negace operátoru OR (nebo).

myslitelů nehlásí. Přesto se každý z nás občas k eklekticismu uchýlí. A eklektiky bývají občas i filosofové matematiky a fyziky. Nevidím v tom nic principiálně špatného, eklekticismus totiž značí i myšlenkovou pružnost, toleranci, otevřenost a respekt k různým směrům, myšlenkám a myslitelům. Navíc kombinace myšlenek z různých dob a okruhů mohou rodit zajímavé myšlenky nové. Být originální a zásadový (tj. netolerantní) za každou cenu nemá smysl. Je ovšem uměním určit, kdy se názorů držet a kdy je opustit.

1.3.9 Obrat k jazyku

Jazyk je veledůležitým nástrojem nejen mezilidské komunikace, ale i komunikace vnitřní – našeho uvažování. Pomocí jazyka vytváříme jména (názvy) a jejich prostřednictvím pojmy, kterými svět pojmáme, které nám usnadňují světu rozumět. Jazyk je stavebním materiálem řeči a spolu s ní usměrňuje a zpětně precizuje (nebo jen ovlivňuje) naši intuici. Pomocí řeči vytváříme teorie jevů. (Onen jazyk nemusí být jen jazykem přirozeným, ale třeba jazykem matematických symbolů.) Vzpomeňme si na školní léta: Mívali jsme často pocit, že něčemu rozumíme a teprve při pokusu naše porozumění slovně zformulovat jsme zjistili, že tomu tak není.

*Mluvíme nejen proto, abychom řekli, co si myslíme těm druhým,
ale i sami sobě. Řeč je i součástí přemýšlení.*

Oliver Sacks⁵⁸

Avšak slovní popis jevů (verbalizace) nebývá vlivem nepřesnosti a vágnosti jazyka dokonalý, intuitivní pochopení jevu (definici jevu) nevystihuje přesně. Zdaleka ne vše lze říci slovy, týká se to třeba popisů zvuku (hudby), vizuálních obrazů, snů, pocitů, tělesných vjemů, náboženské intuice a možná i některých konceptů moderní fyziky. To má důsledky negativní i pozitivní. Negativním důsledkem bývá, že se ztrácejí podstatné rysy jevu, definice jevu není dokonalá. Na druhé straně slovní popis může nezáměrně vést i k vystižení jevu obecnějšího. Výsledkem pak je jakýsi přesah definice (teorie) nad konkrétním jevem,

58) Sacks 1989. Oliver Sacks (1933–2015) byl britský neurolog, přírodovědec a spisovatel se zajímavým filosofickým přesahem. Žil v USA.

tj. původním jevem, pro který byla teorie vytvořena, který měla modelovat (viz kapitola 4.4.2).⁵⁹

Co se nedá říci, o tom se musí mlčet.

Ludwig Wittgenstein⁶⁰

Analytická filosofie a matematický formalismus

Hranice jazyka představuje hranici světa.

Ludwig Wittgenstein⁶¹

Během tisíciletí se jazyk vyvinul v sofistikovaný systém, který nějak (více či méně dokonale) odráží ontologii, tedy co a jak je, dále vztahy mezi předměty, tedy „logiku“ a ve skryté formě i epistemologii, naše pojmání světa, nás samé. Některé filosofické systémy proto vyšly z nápadu spolehnout se na jazyk do té míry, že studují pouze jazykový obraz světa. Prvotní už není svět sám, leč náš jazyk, naše řeč, svět není než „jazykový konstrukt“. Mezi směry, které přisoudily jazyku toto klíčové postavení, patří v první řadě analytická filosofie, která je na „obratu k jazyku“ založena.⁶²

Jak jsme už viděli, lidský jazyk není dokonalý, je to primárně „nástroj přežití“. Bývá často hrubě zjednodušující, neustále se vyvíjí a jeho pravidla nebývají stálá a jednoznačně definována.⁶³ Jak si záhy uvědomil i sám zakladatel a protagonista tohoto přístupu rakouský filosof Ludwig Wittgenstein, ono bezstarostné spojení se na jazyk byl krok unáhlený.

59) To se týká i vzpomínek, i ty se nám nějak vyjevují, i ty jsou jevy. Verbalizace vzpomínek může vést i k falešným vzpomínkám. Psychologové mluví o „zastínění“ nějaké vzpomínky jejím slovním vyjádřením. Vzpomínku na událost si přizpůsobíme tomu, jak jsme o této události už předtím vyprávěli (Shawová 2017).

60) Wittgenstein tu parafrázuje slova sv. Augustina, která se týkala záležitostí božských (Wittgenstein 1993b: 169).

61) Wittgenstein 1993b: 129.

62) Běžně se mluví o „obratu k jazyku“. Mám však pocit, že místo slova „jazyk“ by tu mělo stát „řeč“. Jazyk je jen stavební materiál, jeho praktickou aplikací je řeč. Teprve řeč může mít nějaký smysl, něco vyjadřovat.

63) Tato omezení se pak stala terčem kritiky ze strany tzv. kontinentální filosofie, která si ponechala značnou míru intuitivnosti a tedy i vágnosti. Analytičtí filosofové si s „kontinentálními“ přestali rozumět...

...řídský vzduch však nedá slovům těla.

Humbert Wolfe, *Requiem: the Soldier (Voják)*⁶⁴

Zhruba ve stejné době jako analytická filosofie vzniká i formalistické hnutí v matematice. Také spoléhá na jazyk, nikoli na ten přirozený, ale na jazyk umělý: na matematickou symboliku a syntax (správné propojování symbolů, tj. „slov“), tedy na matematickou řeč. Matematika je pro formalisty toliko hrou symbolů, za nimiž není třeba hledat hlubší realitu, vyšší „ontologickou dimenzi“. Je to jazykový konstrukt, „řeč“ založená na přesném a stabilním matematickém jazyce. „Matematické předměty“ se nechápou jako reprezentace něčeho, jsou to jen prvky a výtvoř matematické řeči. Matematikové hledají pravdu nikoli ve smyslu korespondence s vezdejším světem (ať už jakkoli pojatým) či se světem nějakých forem-idejí, ale ve smyslu konzistence uvnitř světa matematického. Mnohým toto malé a přehledné hřiště stačí dodnes.

„Co to čtete, můj princi?“ ptá se Polonius Hamleta.

„Slova, slova, slova...“

William Shakespeare, *Hamlet*⁶⁵

Nejzazším cílem formalistického hnutí bylo vyvodit veškerou matematiku ze systému základních „pravd“, tj. axiomů. Tento cíl před matematiky postavil německý matematik David Hilbert (1862–1943). Avšak už ve třicátých letech dvacátého století Kurt Gödel⁶⁶ dokázal, že každá soustava axiomů-pravd popisující aritmetiku je nutně neúplná. Axiomy tedy nedefinují, spíše jen nedokonale popisují. Hilbertův program, program formalistů je tedy nesplnitelný, nestačí ani na aritmetiku. Je tedy aritmetika něco víc než jen soubor logických důsledků axiomů? Nemá tedy „pravdu“ spíše matematický platónismus? Avšak, nezpochybňují Gödelovy

64) „...but the air is too thin to carry the things they say“ (<https://allpoetry.com/Humbert-Wolfe>) Humbert Wolfe (1885–1940), britsko-italský básník, populární zejména v Anglii dvacátých let.

65) William Shakespeare, *Hamlet, princ Dánský* (překlad J. J. Kolár) 1855: 11.

66) Kurt Gödel (1906–1978) byl rakouský matematik narozený v Brně. Na začátku druhé světové války se přestěhoval do USA, do Princetonu. Stal se jedním z nejvýznamnějších logiků. V oboru relativistické kosmologie spolupracoval s Albertem Einsteinem.

výsledky i tento platónismus?⁶⁷ Není nakonec jedinou cestou pragmatismus, pro který není matematika o moc víc než užitečný nástroj? Pomůcka k chápání, ve svých širších evolučně-biologických souvislostech pak pomůcka k přežití?

... věci nejsou jazykem reprezentovány, ale vytvářeny.

Richard Rorty⁶⁸

Avšak řekne-li se, že svět je „jazykový konstrukt“, může to znamenat dvě různé věci: (1) že svět je udělán jazykem či za pomoci jazyka (botu bychom v tomto smyslu mohli prohlásit za „obuvnický konstrukt“), či že (2) je udělán z jazyka (v tomto smyslu bychom mohli botu prohlásit za „kožený konstrukt“).⁶⁹ Zatímco analytická filosofie vychází spíše z pojetí prvního, matematický formalismus se už blíží pojetí druhému.

Matematický formalismus lze chápat jako samoučelnou hru, sebeuspokojování matematiků. Proč ne? I šach nebo dáma jsou takovouto samoučelností. (Pak ovšem vyvstává otázka, jak to, že má matematika tak četné praktické aplikace.) Nebo lze z rigorózního formalismu trochu ustoupit a matematická schémata dodatečně zaplnit nějakým obsahem, nějakou ontologií. Záleží pak na nás, jakou náplň jim dáme. Matematika se tak stává univerzálním nástrojem, „obecnou epistemologií“, je jakousi „teorií všeho“. Je o všem a zároveň o ničem.

*Matematiku je možno definovat jako disciplínu, ve které nevíme,
o čem mluvíme...*

Bertrand Russell⁷⁰

67) Gödelovy výsledky totiž zpochybňují i možnost dobudovat říši matematických entit. Viz Kůrka 2009. Vyskytly se i názory, že Gödelovy věty o neúplnosti znemožňují pochopení lidské mysli jako systému pracujícího s nějakými algoritmy, že tedy neplatí analogie mysl-počítač. Penrose 1994, viz též: <http://www.iep.utm.edu/lp-argue/>

68) Rorty 1980. Richard McKay Rorty (1931–2007) byl americký filosof pragmatismu.

69) Peregrin 1998.

70) Russell 2015: 59. Bertrand Arthur William Russell (1872–1970) byl významný britský matematik, filosof, logik a spisovatel, nositel Nobelovy ceny za literaturu (1950).

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázkou z knihy Mýtus nekonečno.
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.