7.3 Grafy lineárních lomených funkcí

Úloha 1

Sestrojte graf funkce:

a) $f : y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ b) $f : y = \dfrac{-x+5}{x+2}$

Řešení:

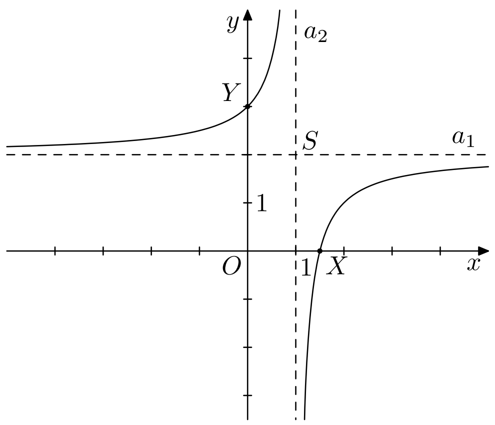
a) Předpis funkce upravíme:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1+1)-3}{x-1} = \frac{2(x-1)+2\cdot 1-3}{x-1} = \\
&= \frac{2(x-1)-1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}
\end{aligned}
$$

V závorce se za proměnnou x připíše -1 (aby vznikl stejný výraz jako ve jmenovateli) a doplní se i číslo opačné, které se v dalším kroku ze závorky vyjme, zbytek výrazu (-3) se opíše. Zlomek se rozdělí na dva a jeden z nich se zkrátí.

Stejné úpravy se docílí dělením: $y = (2x-3) : (x-1) = 2 - \dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{-(2x-2)}{-1}$$

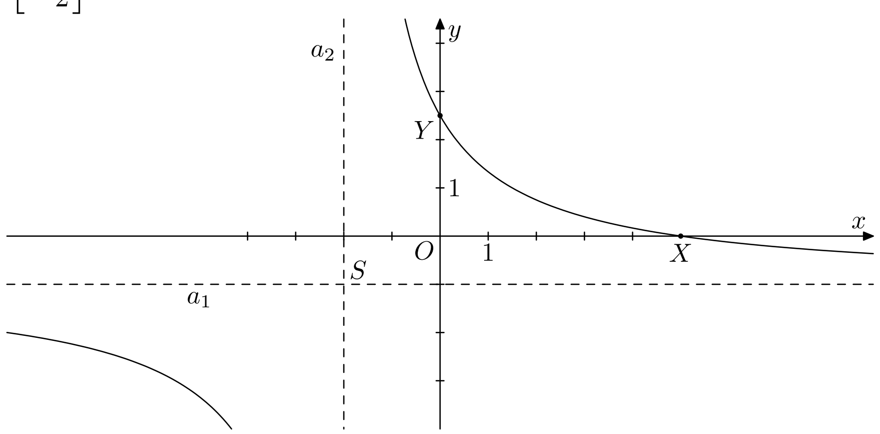


Pokud pracuješ s tabulkami, souřadnice středu je možné doplnit podle uvedených vzorců. Asymptoty procházejí středem $S[1; 2]$. Průsečíky se souřadnicovými osami se určí dosazením 0 za proměnnou x nebo y, např. do původního předpisu funkce: $Y[0; 3]$, $X\left[\dfrac{3}{2}; 0\right]$

Asymptoty dělí rovinu na čtyři části. V tomto případě body X a Y leží v různých částech (kvadrantech), každý bod proto náleží jiné větvi hyperboly. Obě větve jsou souměrné podle středu.

b) Postup jako v případě a): $y = \dfrac{-x+5}{x+2} = \dfrac{-(x+2-2)+5}{x+2} = \dfrac{-(x+2)+7}{x+2} = -1 + \dfrac{7}{x+2}$

(Výsledných úprav lze opět docílit dělením.) Důležité body pro sestrojení grafu jsou $S[-2; -1]$, $Y\left[0; \dfrac{5}{2}\right]$, $X[5; 0]$.



Oba průsečíky X, Y se souřadnicovými osami leží ve stejném kvadrantu vymezeném asymptotami, proto náleží téže větvi hyperboly. Druhá větev je souměrná podle středu S.

7.4 Grafy lineárních lomených funkcí s absolutní hodnotou

Úloha 2

Sestrojte graf funkce:

a) $f : y = \left|-2 + \dfrac{1}{x-2}\right|$

b) $f : y = -2 + \dfrac{1}{|x|-2}$

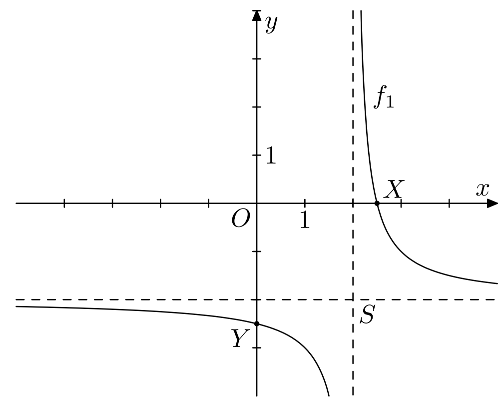
c) $f : y = \dfrac{x + |x-2|}{x-1}$

Řešení:

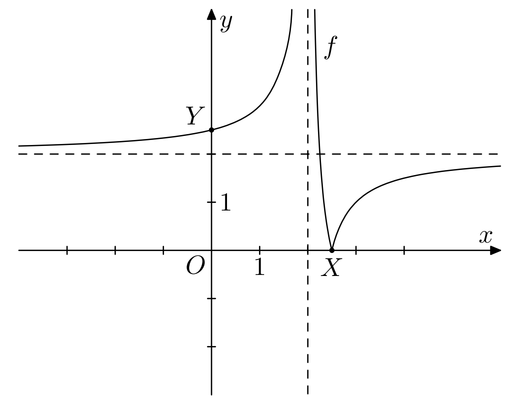
a) Nejdříve sestroj graf funkce bez absolutní hodnoty, tj. $f_1 : y = -2 + \dfrac{1}{x-2}$. Graf této funkce má střed v bodě $S[2; -2]$, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami jsou $X\left[\dfrac{5}{2}; 0\right]$ a $Y\left[0; -\dfrac{5}{2}\right]$.

U funkce, jejíž funkční hodnoty (celá pravá strana) jsou v absolutní hodnotě, platí, že žádné body grafu neleží pod osou x; nezáporné hodnoty absolutní hodnota neovlivní, naopak u záporných hodnot se změní znaménko. Části pomocné funkce ležící pod osou x se v osové souměrnosti „překlopí“ kolem této osy. Totéž platí pro asymptotu.

Graf pomocné funkce f_1:

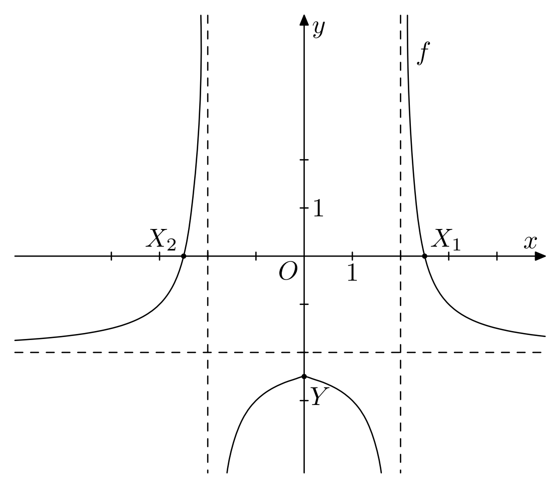


Výsledný graf funkce f:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{2\}$, $H_f = \mathbf{R}_0^+$

b) Funkce $f : y = -2 + \dfrac{1}{|x|-2}$, v níž je proměnná x v absolutní hodnotě, je sudá, graf je souměrný podle osy y. Body grafu s nezápornou souřadnicí x se shodují s body pomocné funkce f_1, části grafu vpravo od osy x se „obtisknou“ do levé části.



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2; 2\}$

$H_f = \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right\rangle \cup (-2; \infty)$